

台北市立第一女子高級中學 九十四學年度第二學期高三數學甲第一次段考

題型題數：單選題 3 題，多選題 3 題，填充題第 A 至 G 題共 7 題，證明、計算題共 2 題。

第一部分：選擇題(36%)

壹、單選題(12%)

說明：第 1 至 3 題，每題選出一個最適當的選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 十階方陣 $A=(a_{ij})$ 滿足 $a_{ij}=i^2+j^2$ ，則 A 中所有元素的總和為
(1) 5500 (2) 6600 (3) 7700 (4) 8800

2. 方陣 $A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ，方陣 $B(\theta)=\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，

請選出下列有關方陣 $A(\theta)$ 與方陣 $B(\theta)$ 錯誤的敘述，

(1) $A(\theta)^{-1}=B(\theta)$ (2) $B(\theta)^n=A(\theta)^n$ (3) $A(\alpha)A(\beta)=A(\alpha+\beta)$ (4) $A(\theta)^n=A(n\theta)$

3. 設二數列的第 n 項分別為 $a_n=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$ ， $b_n=n^3+2n-2$ ，

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 等於 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2

貳、多選題(24%)

說明：第 4 至 6 題，每題各有 4 個選項，其中至少一個是正確的，請選出正確選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 已知 A, B, C 均為同階方陣， O 為零矩陣，請選出下列正確的敘述，

(1) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ (2) $AB=AC$ 且 $\det(A) \neq O \Rightarrow B=C$
(3) $AB=O \Rightarrow A=O$ 或 $B=O$ (4) $A \neq O$ 且 $B \neq O \Rightarrow AB \neq O$

5. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，圓 $C: x^2+y^2=4$ 經過 A 之變換後為圖形 C' ，則下列何者正確？

(1) 圖形 C' 之方程式： $x'^2+4x'y'+5y'^2=4$ (2) 圖形 C' 為一橢圓
(3) 圖形 C' 之長軸長 $4(\sqrt{2}+1)$ (4) 圖形 C' 之短軸長 $4(\sqrt{2}-1)$

6. 設 $f(x)$ 為一多項式，已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -1$ ，若 $f(x)$ 以 $(x-1)(x-2)$ 除之所得商式為 $g(x)$ ，則

(1) $(x-1)(x-2)$ 可整除 $f(x)$ (2) $g(1) = -3$ (3) $g(2) = 2$ (4) $g(x)$ 被 $(x-1)(x-2)$ 除之餘式為 $2x-5$

第二部分：填充題(49%)

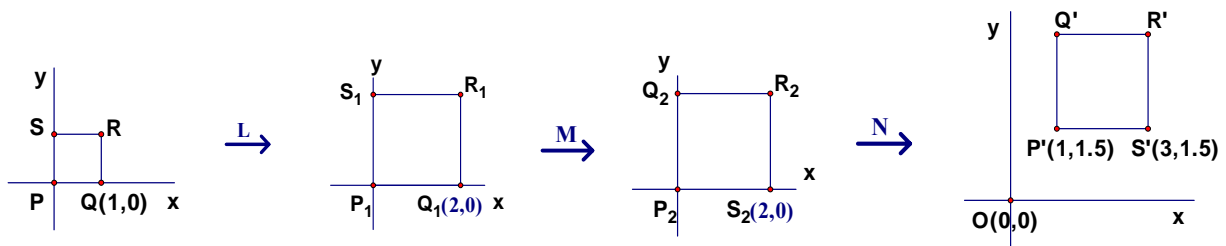
說明：1. 第 A 至 G 題。2. 每格完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 三階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ ，此種方陣稱為對稱方陣。若 $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 且

a, b, c, d, e, f 皆互異，則此種方陣 M 共有 _____ 個。(此格請以標準分解式表示之)

B. 已知直線 $L: x+y=0, M: \sqrt{3}x-y=0$ ，將 L 對 M (對稱軸)作鏡射得直線 L' ，則 L' 的方程式 _____。

C. 設下圖正方形 PQRS 中， $P(0, 0), Q(1, 0)$ ，將 PQRS 經一系列的變換後逐步的映至 $P'Q'R'S'$ ，其中經過 L, M, N 三個變換，將 P 映至 P_1, P_1 映至 P_2, P_2 映至 P' ，其餘的頂點類推，以下圖表示每個變換的過程：(下列四圖中之四邊形均為正方形)



設 T 表示 L, M, N 三個變換的合成，則點 (x, y) 經 T 變換後之坐標為 _____。

D. 設 n 為正整數，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是 $(6, 0), (0, \frac{1}{n}), (0, -\frac{1}{n})$ 。

假設此三角形的外接圓半徑長等於 D_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n =$ _____。

E. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $3n + 2 < a_n < 3n + 5$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

F. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} =$ _____。

G. 設 $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq -1 \\ ax + b & , -1 < x < 2 \\ -x^3 & , x \geq 2 \end{cases}$ ，若 $g: R \rightarrow R$ 是連續函數，則 $a =$ _____， $b =$ _____。

第三部分：證明、計算題(15%)

- 某人遊走於甲、乙、丙三城鎮，此三城鎮皆有道路相通。當此人夜宿於某城鎮時，翌日早晨醒來，選擇留在該城鎮的機率為 $\frac{1}{2}$ ，前往其他城鎮的機率均為 $\frac{1}{4}$ 。假設此人某日夜宿於乙鎮，試求此人三日後，遊走至丙鎮的機率。(9%)
- 設圓的半徑為 r ，試證：圓的面積 πr^2 是圓內接正 n 邊形面積的極限。(6%)



台北市立第一女子高級中學 九十四學年度第二學期

高三數學甲 第一次段考學生答案卷

95/03/22

題型題數：單選題 3 題，多選題 3 題，填充題第 A 至 G 題共 7 題，證明、計算題共 2 題。_____

第一部分：選擇題(36%) 班級：_____ 座號：_____

壹、單選題(12%) 姓名：_____

說明：第 1 至 3 題，每題選出一個最適當的選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未答者，不給分亦不扣分。		
1.	2.	3.

貳、多選題(24%)

說明：第 4 至 6 題，每題各有 4 個選項，其中至少一個是正確的，請選出正確選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。		
4.	5.	6.

第二部分：填充題(49%)

說明：1.第 A 至 G 題。2.每格完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。			
A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	

第三部分：證明、計算題(15%)。請自行書寫題號，若空白不足，書寫至背面。



台北市立第一女子高級中學 九十四學年度第二學期

高三數學甲 第一次段考 教師答案卷

95/03/22

題型題數：單選題 3 題，多選題 3 題，填充題第 A 至 G 題共 7 題，證明、計算題共 2 題。

第一部分：選擇題(36%)


壹、單選題(12%)

說明：第 1 至 3 題，每題選出一個最適當的選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未答者，不給分亦不扣分。			
1.	3	2.	2
3.		2.	2

貳、多選題(24%)

說明：第 4 至 6 題，每題各有 4 個選項，其中至少一個是正確的，請選出正確選項，寫在答案卷之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。			
4.	2	5.	1 2 3 4
6.		5.	1 2 4

第二部分：填充題(49%)

說明：1.第 A 至 G 題。2.每格完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。			
A.	$2^6 \times 3^3 \times 5 \times 7$	B.	$(\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = 0$
C.	$(2y+1, 2x+1.5)$	D.	3
E.	3	F.	$\frac{1}{6}$
G.	$(-3, -2)$		

第三部分：證明、計算題(15%)。請自行書寫題號，若空白不足，書寫至背面。

1.【詳解】設 n 天後，留宿於甲，乙，丙鎮之機率分別為 $a_n, b_n, c_n \Rightarrow a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{6}{16} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{6}{16} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{64} \\ \frac{22}{64} \\ \frac{21}{64} \end{bmatrix},$$

\Rightarrow 三日後，遊走（夜宿）於丙鎮之機率為 $\frac{21}{64}$ 。（若有寫出轉移矩陣得 5%，全對得 9%）

2. 如右圖：令 a_n 表半徑為 r 的圓內接正 n 邊形的面積，而 \overline{AB} 為圓內接正 n 邊形的一邊

則 $a_n = \frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ ，於是所求圓的面積為 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{2\pi}{n} \right]$

$$= \pi r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2 \cdot (6\%)$$

