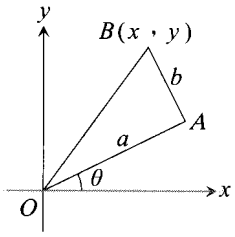
北區公立高中九十三學年度第二學期第三次模擬考試(數學乙)

第壹部分：（佔 78 分）

一、單一選擇題：（30%）

說明：第 1 至 5 題為單一選擇題，每題選出最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數至零分為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 如圖，A 是角 θ（位於標準位置）終邊上一點，已知 $\overline{OA}=a$，$\overline{AB}=b$，且 $\angle OAB=90°$，若 B 點的坐標為 $(x，y)$，則 $y=$？



(1) $a\cos\theta+b\sin\theta$

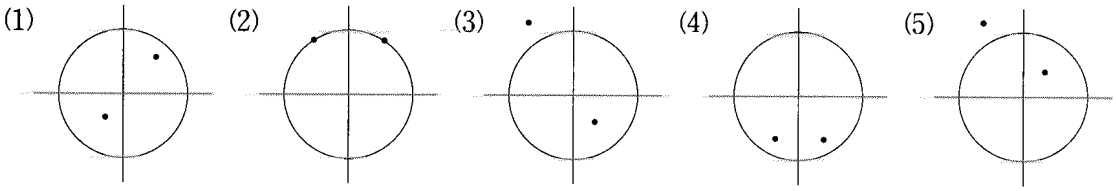
(2) $a\cos\theta+b\cos\theta$

(3) $a\sin\theta+b\sin\theta$

(4) $a\sin\theta+b\cos\theta$

(5) $a\cos\theta+b\tan\theta$

2. 設 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{3}$，令 $\alpha=z^2$，而 β 是 $x^2=z$ 的一個解且其實部為正，將 α，β 二複數標示在複數平面上，下面哪一個圖形正確標示 α 與 β 之位置？（圖形中的圓都是圓心位於原點的單位圓）



3. 設集合 $A=\{1，2，3，4\}$，集合 $B=\{1，2，3，4，5，6\}$，f 是一個由 A 映至 B 的函數，滿足 $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$，試問這樣的函數 f 有幾個？

(1) 15　(2) 20　(3) 56　(4) 120　(5) 360

4. 把一個點 $A(x_1，y_1)$ 繞著坐標原點旋轉 $30°$，然後將新點的兩坐標量皆增為兩倍，然後再對稱直線 $y=x$。經過這些平面變換後，A 點變換為點 $B(x_2，y_2)$。若以矩陣來表示 A，B 點坐標之關係如下：$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=$

(1) $\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$

5. 函數 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 之圖形可藉由將 $y=\sin x$ 之圖形適當伸縮平移而得。下列何者是正確的操作？

(1)先將 $y=\sin x$ 之圖形沿 x 軸及 y 軸均拉長爲 2 倍，再往右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位

(2)先將 $y=\sin x$ 之圖形沿 x 軸及 y 軸均拉長爲 2 倍，再往左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位

(3)先將 $y=\sin x$ 之圖形沿 x 軸壓縮爲 $\frac{1}{2}$ 倍，再沿 y 軸拉長爲 2 倍，再往左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位

(4)先將 $y=\sin x$ 之圖形沿 x 軸壓縮爲 $\frac{1}{2}$ 倍，再沿 y 軸拉長爲 2 倍，再往右平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位

(5)先將 $y=\sin x$ 之圖形沿 x 軸壓縮爲 $\frac{1}{2}$ 倍，再沿 y 軸拉長爲 2 倍，再往左平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位

二、多重選擇題：（6%）

說明：以下第 6 題為多重選擇題。有 5 個備選答案，請將正確答案，劃記在答案卡之「解答欄」。5 個備選答案各自獨立，唯至少有一個是對的；每個備選答案若選擇正確，則得 1.2 分；否則倒扣 1.2 分。整題不作答者，得零分，全答對者得 6 分。若在備答選項以外之區域劃記一律倒扣 1.2 分。倒扣到本大題之實得分數至零分為止。

6. 關於雙曲線 $(2x-y-5)(2x+y-7)=-16$，下列之論述何者正確？

(1) $2x-y-5=0$，$2x+y-7=0$ 是雙曲線的二漸近線

(2)中心是 $(3，1)$

(3)貫軸是 $y=1$

(4)共軛軸是 $x=3$

(5)雙曲線上一點至兩漸近線距離的乘積爲 $\frac{16}{25}$

三、選填題（42%）

說明：A，B，C，D，E，F 為選填題，共六題七格。作答請依所標示的列號（7～26）劃記在答案卡之「解答欄」內。每格完全答對得 6 分，未完全答對，不給分。

A. 設 $f(x)=2x^3-x^2+4x-35$，$g(x)=x^4+x^3+8x^2-x+21$，若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式爲 x^2+px+q，其中 $p，q\in R$，則 $(p，q)=$ （⑦，⑧） 。

B. 在觀測天文學上，爲了便於辨識星體的明亮度，將星空裡肉眼能見到的星體相對亮度強弱，分成 1 至 6 等級。由較亮等級的 1 等星，到肉眼勉強能見的 6 等星；星等愈大者愈暗，其光度依等比數列遞減，亦即 1 等星之光度爲 2 等星之 r 倍，2 等星之光度爲 3 等星之 r 倍，…，5 等星之光度爲 6 等星之 r 倍。已知 1 等星之光度爲 6 等星之 100 倍，試利用所附之對數表計算，

(1)前述之 r（亦即 1 等星爲 2 等星光度的倍數）= ⑨.⑩⑪⑫ ；（寫到小數點後第三位）

把星等的定義延伸：0 等星之光度爲 1 等星之 r 倍，-1 等星之光度爲 0 等星之 r 倍，…，6 等星之光度爲 7 等星之 r 倍，7 等星之光度爲 8 等星之 r 倍等等。若以 F_m 表示 m 等星的光度，F_0 表示 0 等星的光度，則其關係可以下式表示：

$$m=k\cdot\log\frac{F_m}{F_0}$$

(2)上式中，常數 $k=$ ⑬⑭.⑮ 。（寫到小數點後第一位）

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13

C. 已知空間中兩直線 L_1：$\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$，$L_2$：$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{3}$ 共平面，試求出包含此兩直線之平面方程式。若將此方程式表爲 $x+\alpha y+\beta z+\gamma=0$，其中 α，β，$\gamma\in R$，則 $(\alpha,\beta,\gamma)=$ （⑯⑰，⑱，⑲⑳） 。

D. 開學時，老師想了解學生的數學程度，設計了一份試卷來測驗學生。試卷共有 10 題，每題 10 分。每題得分只有 10 分與 0 分兩種（沒有半對，也不倒扣）。考完後，老師公布了每題的答對率如下：

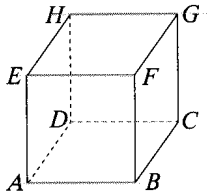
題　號	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
答對率	80%	60%	60%	40%	70%	50%	50%	50%	80%	40%

試問：此次測驗全體受測學生之平均分數爲何？

Ans： ㉑㉒ 。（小數點後四捨五入）

E. 當 $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 時，$f(\theta) = -\sec^2\theta + 2\tan\theta + 1$ 之最大值爲 α，最小值爲 β，則 $\alpha+\beta=$ ㉓㉔ 。

F. 一正六面體的下底 $ABCD$，上底 $EFGH$（如圖），P 是側面 $ADHE$ 的中心點，Q 是正面 $ABFE$ 的中心點，R 是上底 $EFGH$ 的中心點，經過 P、Q、R 三點的平面把此正六面體分割爲兩部份，小的部份體積爲 a，大的部份體積爲 b，則 $a : b=$ ㉕ ：㉖ 。



第貳部分：非選擇題（佔 22 分）

說明：一、二題為計算證明題，請在「答案卷」之「作答區」作答，必須於「題號欄」標明題號，且應寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、已知數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下：$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{1-3a_n}{1-4a_n}$（$n \in N$），

(1)試求 a_5。（2 分）

(2)推測 a_n 之值（以 n 表示），（2 分）

並以數學歸納法證明之。（8 分）

二、一米商有兩倉庫，倉庫 I 存米 40 噸，倉庫 II 存米 50 噸。今自甲、乙兩地接獲訂單，甲地訂購 30 噸，乙地訂購 40 噸。假設從倉庫 I 運米至甲、乙兩地之運費分別爲每噸 120 元與 150 元，從倉庫 II 運米至甲、乙兩地之運費分別爲每噸 100 元與 140 元。試問在滿足甲、乙兩地訂單需求的條件下，最節省的運費是多少元？（10 分）

北區公立高中九十三學年度第二學期第三次模擬考試(數學乙)解答

第壹部份：

一、單一選擇題

1、(4)　　2、(1)　　3、(2)　　4、(4)　　5、(3)

二、多重選擇題

6、(1)(2)

三、選填題

A、$(2,7)$　　B、2.512　　C、$(-2,1,-4)$　　D、58

E、-2　　F、$1:5$

第貳部份：

一、(1) $a_5=\dfrac{5}{9}$　　(2)猜測 $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，証明略

二、8800 元