北區公立高中九十三學年度第二學期第二次模擬考試(數學乙)

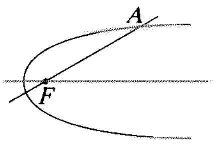
第壹部分：

一、單一選擇題：（共21分）

說明：第1至3題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得7分，答錯倒扣$\frac{7}{4}$分，倒扣到本大題之實得分數為零分為止。未答者，不給分亦不扣分。

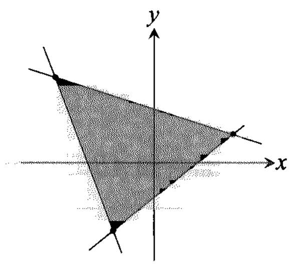
1. 下列何者不爲函數圖形$f(x)=x^2+2x+2$平移後所得到的圖形
   (1)$f(x)=x^2-6x+2$
   (2)$f(x)=(x+1)^2+2(x+1)+2$
   (3)$f(x)=2x^2+4x+4$
   (4)$f(x)=(x-2)^2+2x+2$
   (5)$f(x)=x^2+2(x+1)+2$

2. 某彗星的軌道爲一拋物線，而以太陽爲焦點，當彗星與太陽的距離爲d（AF線段長）時，兩者連線與拋物線的軸成30°（如右圖），當彗星與太陽的連線垂直於拋物線的軸時，兩者的距離爲



   (1)$\frac{1}{2}d$
   (2)$\frac{\sqrt{3}}{2}d$
   (3)$\frac{2-\sqrt{3}}{2}d$
   (4)$\frac{2+\sqrt{3}}{2}d$
   (5)$\frac{2-\sqrt{3}}{3}d$

3. 如右圖，陰影區域是由直線$x+5y-a=0$，$x-y-b=0$，$2x+y-c=0$所圍成的，試問下列何者爲此區域的聯立不等式？



   (1)$x+5y-a\le 0$，$x-y-b\ge 0$，$2x+y-c\le 0$
   (2)$x+5y-a\ge 0$，$x-y-b\ge 0$，$2x+y-c\le 0$
   (3)$x+5y-a\le 0$，$x-y-b\le 0$，$2x+y-c\le 0$
   (4)$x+5y-a\ge 0$，$x-y-b\le 0$，$2x+y-c\le 0$
   (5)$x+5y-a\le 0$，$x-y-b\le 0$，$2x+y-c\ge 0$

二、多重選擇題：（共 16 分）

說明：第 4 至 5 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的。各選項獨立計分，每答對一個選項可得 8 分；每答錯一個選項倒扣 1.6 分；完全答對得 8 分，未答者，不給分亦不扣分。

4. 四面體 $OABC$ 中，$\overline{OA}=\overline{OB}=2$，$\overline{OC}=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3$，設 $\angle AOB=\theta$，$\triangle ABC$ 的面積 $=S$，則

   (1) $\overline{BC}=\sqrt{7}$

   (2) $\overline{AC}=\sqrt{19}$

   (3) $\overline{AB}=2\sqrt{2-2\cos\theta}$

   (4) $S=\sqrt{-4\cos^2\theta-6\cos\theta+10}$

   (5) $\triangle ABC$ 的面積最大值爲 $\frac{7}{2}$

5. 設 A，B 都是 2 階方陣，以下敘述何者正確？

   (1) $AB=BA$

   (2) $(A^t)^t=A$

   (3) 若 A 的反方陣 A^{-1} 存在，則 $(A^{-1})^{-1}=A$

   (4) 若 $A^2=0$，則 $A=0$

   (5) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

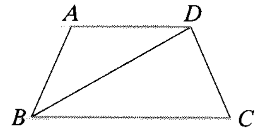
三、選填題：（共 42 分）

說明：第 A 至 F 題，畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號⑥～⑰內，每一空格完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 以 x^2-x 除 $(x^3-x^2+x-1)^{2005}$ 的餘式爲 $ax+b$，則 $(a, b)=$ ___(⑥，⑦⑧)___ 。

B. 設複數 z 滿足 $z+|z|=2+8i$，試求 $|z|^2=$ ___⑨⑩⑪___ 。

C. 如右圖 $ABCD$ 爲一梯形，$\overline{AB}=\overline{CD}=5$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AD}=6$，則 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=$ ___⑫⑬___ 。



D. 設 P 爲雙曲線 $16(y-1)^2-9(x+1)^2=144$ 上的一點，又 P 到雙曲線兩焦點 F_1，F_2 的距離比爲 1：3，則 $\triangle PF_1F_2$ 的周長爲 ___⑭⑮___ 。

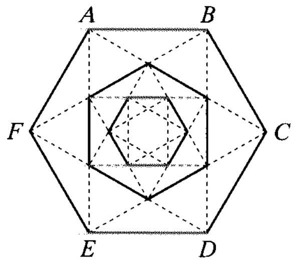
E.　方程式 $4\log x=\log 4x$ 有 ⑯ 個相異實根。

F.　若 $C^{94}_{49}=C^{92}_{47}+n\cdot C^{92}_{48}+C^{92}_{49}$，則 n 之值爲 ⑰ 。

第貳部分：非選擇題（共 21 分）

說明：一、二題為計算題，應寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、如圖，一邊長爲 $2\sqrt{3}$ 的正六邊形 $ABCDEF$，設其周長爲 a_1。現在連接對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$，$\overline{CE}$，$\overline{DF}$，$\overline{EA}$，$\overline{FB}$（如虛線所示），所得到的新的正六邊形，設其周長爲 a_2。如此繼續下去得到一周長數列 a_1，a_2，a_3，…。試求：



(1) $a_5=$？（3 分）

(2)求此周長數列一般項 $a_n=$？（3 分）

(3)求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=$？（4 分）

二、(1)請以數學歸納法證明：$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$，其中 n 爲正整數。（6 分）

(2)求 $\begin{bmatrix}-2\sqrt{3} & 2\\ -2 & -2\sqrt{3}\end{bmatrix}^5$ 之值。（寫成 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 之形式）（5 分）

北區公立高中九十三學年度第二學期第二次模擬考試(數學乙)解答

第壹部份：

一、單一選擇題

1、(3)　　2、(3)　　3、(5)

二、多重選擇題

4、(1)(3)(4)(5)　　5、(2)(3)(5)

三、選填題

A、$(1,-1)$　　B、289　　C、48　　D、22

E、1　　F、2

第貳部份：

一、(1) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$　　(2) $\frac{12}{(\sqrt{3})^{n-2}}$　　(3) $18(\sqrt{3}+1)$

二、(1)略　　(2) $\begin{bmatrix} -512\sqrt{3} & -512 \\ 512 & -512\sqrt{3} \end{bmatrix}$