

北區公立高中九十三年度第二學期第二次模擬考試(數學甲)

第1頁

共4頁

第壹部分：選擇題（共75分）

一、單一選擇題：（占12分）

說明：第1至2題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得6分，答錯倒扣1.5分，倒扣到本大題之實得分數為零分為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 若 $\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)+\dots+\log\left(1+\frac{1}{m+n-1}\right)=\log n$ ，其中 $m, n \in N$ ，

則 $(m, n)=?$

(1) (10, 10)

(2) (8, 8)

(3) (4, 4)

(4) (2, 2)

(5) (1, 1)

2. 設 a, b, c 分別是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所對的邊的邊長，則直線 $\sin A \cdot x + ay + c = 0$

與 $bx - \sin B \cdot y + \sin C = 0$ 的位置關係是？

(1) 平行

(2) 重合

(3) 垂直

(4) 相交但不垂直

(5) 以上皆是

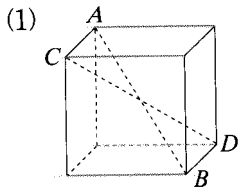
二、多重選擇題：（占21分）

說明：第3至5題，每題各有5個選項，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1.4分；每答錯一個，倒扣1.4分，完全答對得7分，未答者，不給分亦不扣分。若在被答選項以外之區域劃記，一律倒扣1.4分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

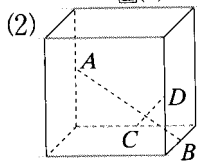
3. 關於二階方陣的平面變換，下列敘述哪些是正確的？

- (1) 任意三角形在經過 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的變換後，面積不變
- (2) 某圖形在經過 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的變換後，原圖形與新圖形對稱於 y 軸
- (3) 某圖形在經過 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的變換後，原圖形與新圖形對稱於原點
- (4) 某圖形在經過 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的變換後，原圖形與新圖形對稱於 $x=y$ 直線
- (5) 橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 經過 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的變換後，所得新圖形為半徑是 1 的圓

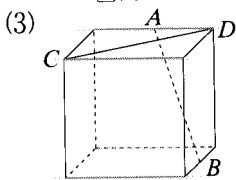
4. 圖(一)至圖(五)是五個正立方體的透視圖，每個圖中的 A, B, C, D 不是頂點，就是稜邊的中點。問：哪幾個圖形中的向量 \overrightarrow{AB} 與向量 \overrightarrow{CD} 互相垂直？



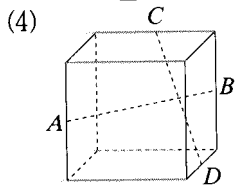
圖(一)



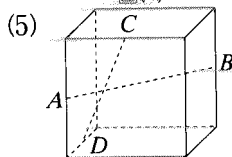
圖(二)



圖(三)



圖(四)

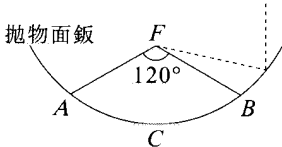


圖(五)

5. 高三甲班有 45 位同學，利用班會時間開同樂會，導師爲了增加熱鬧氣氛作了 45 張彩券，其中有 5 張有獎，其餘 40 張沒獎，全放入摸彩箱中，問下列敘述何者正確？
- (1) 阿呆吵著要第一個摸彩，他認爲第一個摸彩中獎機率最大
 - (2) 黑美人排第一個摸彩，結果槓龜，班頭心中暗爽，他認爲他中獎機率提高
 - (3) 第一個沒中獎，第二個班頭真的如願摸到了獎，睡仙第三個摸，他認爲：第一個槓龜，第二個中獎，互相抵消並不影響他原中獎之機率
 - (4) 小胖排在最後一個摸彩，但還沒輪到他，5 張有獎的彩券已經都摸光了，他抗議老師不公，排他最後一位摸彩，中獎機率最低
 - (5) 每一位同學摸彩中獎機率都是 $\frac{1}{9}$ ，與排序無關

三、選填題：（占 42 分）

說明：第 A 至 F 題，請在答案卡的「解答欄」之列號（6-18）中標示答案。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 學校餐廳每天供應 1000 位學生用餐，每星期一提供 A, B 兩樣主菜讓學生選擇，調查顯示，凡是這星期一選 A 主菜的人，下星期一會有 20% 改選 B 主菜，而選 B 主菜的，下星期一會有 30% 改選 A 主菜，若用 a_n, b_n 表示第 n 個星期一分別選 A, B 主菜的人數，若第一個星期一有 800 人選 A 主菜，問第四個星期一有多少人仍然選 A 主菜，即求 $a_4 =$ ⑥⑦⑧。
- B. 西藏地處高海拔，沸點較低，煮水需比較久才真正煮沸可以喝，由於木材稀少，藏人發明了藉助拋物面的太陽能反射，來煮開水，下圖是西藏用來煮開水的拋物面鍋，曲線部分是拋物線轉一圈而成類似鍋子的拋物面鍋，水壺放置在焦點 F 的地方， FA 與 FB 是架住水壺的兩根固定鐵條，長度都是 1.2 m。當正午時間，太陽光從正上方直射而下（虛線部分），透過拋物面鍋，全部的太陽光會聚集在焦點 F 的地方，也是水壺的位置，因此水壺的水很快就滾了。
已知 $\angle AFB = 120^\circ$ ，求焦點 F 至拋物面鍋最低點 C 的距離是多少公尺？ ⑨⑩。
- 
- C. 今天的數學課好像在教解方程式的問題，下課鐘響之前愛穗同學才醒過來，只看到老師一面擦黑板，一邊說著「……，最後提示你們，它的根構成等比數列。」說時遲，那時快，老師已將黑板擦到剩下 $x^3 - 10x^2 + 20x + \dots$ 而已。你能幫愛穗同學找出常數項嗎？此常數項 = ⑪⑫。

- D. 一漁夫晚上無聊，坐在船頭尋找北極星，漁夫發現，他必須仰角 30 度時，才可以正視著北極星，問漁夫的船在北緯幾度？ ⑬⑭°。
- E. 正六邊形的六邊在共平面的任一直線上投影的平方和等於 a ，若此正六邊形的邊長是 10，求 $a =$ ⑮⑯⑰。
- F. 若 $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$ ， $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ ， \dots ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ ⑱。

第貳部分：非選擇題（共 25 分）

說明：第 1 及第 2 題為計算題，請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號，並寫出演算過程，每題配分標於題末。

1. 中國石油公司有兩個汽油倉庫，甲油庫存有汽油 5 千加侖，乙油庫存有汽油 6 千加侖，今有 A, B 兩個站各需汽油 3 千與 4 千加侖，又油庫與加油站間，每千加侖之運費如表，設甲油庫運 x 千加侖至 A 加油站， y 千加侖至 B 加油站，乙油庫運 $(3-x)$ 千加侖至 A 加油站， $(4-y)$ 千加侖至 B 加油站。
- | | A | B |
|-----|-------|-------|
| 甲油庫 | 500 元 | 600 元 |
| 乙油庫 | 650 元 | 700 元 |
- (1) 依題意 x, y 滿足二元一次不等式方程組 L ，請寫出此不等式方程組 L 。（4 分）
- (2) 設運費為 P 元，則目標函數 $P = ax + by + 4750$ ，求數對 $(a, b) = ?$ （3 分）
- (3) 該如何運送才能使運費最少？此最少運費為何？（8 分）
2. 設 x, y 為實數，且滿足 $x^2 + xy + y^2 = 6$
- (1) $x^2 + xy + y^2 = 6$ 經坐標軸旋轉 θ 後可化成形如 $\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} = 1$ ，求 θ, a, b 。（6 分）
- (2) 承(1)求 $x^2 + y^2$ 之最大值為何？（4 分）

北區公立高中九十三學年度第二學期第二次模擬考試解答(數學甲)

第壹部份：

一、單一選擇題

1、(4) 2、(3)

二、多重選擇題

3、(1)(2)(3)(4)(5) 4、(3)(4)(5) 5、(2)(5)

三、選填題

A、625 B、0.9 C、-8 D、 30° E、300

F、2

第貳部份：非選擇題

$$1、(1) \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq 3-x \leq 3 \\ 0 \leq 4-y \leq 4 \\ x+y \leq 5 \\ (3-x)+(4-y) \leq 6 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 1 \leq x+y \leq 5 \end{cases}$$

(2) $(-150, -100)$

(3) 甲油庫運 3 千加侖至 A，運 2 千加侖至 B；乙油庫運 0 千加侖至 A，運 2 千加侖至 B，運費至少 4100 元

2、(1) $\theta = 45^\circ$ (或 $\frac{\pi}{4}$)， $a = 4$ ， $b = 12$ (2) 12