

第壹部分：(75分)

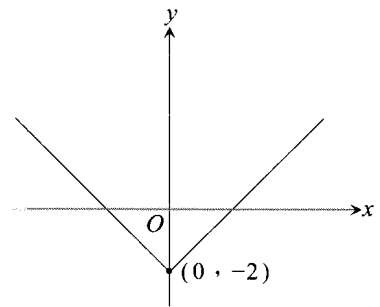
一、單一選擇題：(12分)

說明：第1至2題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得6分，答錯倒扣1.5分，倒扣到本大題之實得分數為零分為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 坐標平面上函數 $y=f(x)$ 的圖形如右圖所示，請問方程式

$|f(x)|=1$  有多少個實數解？

- (1) 0 個
- (2) 1 個
- (3) 2 個
- (4) 3 個
- (5) 4 個



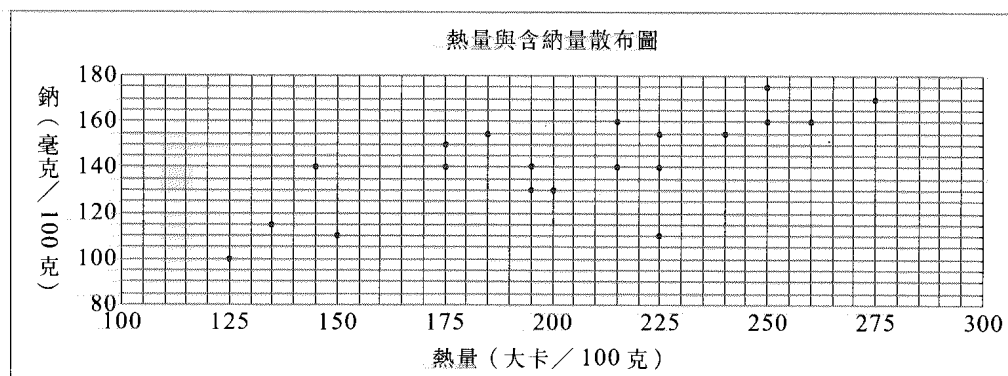
2. 袋中有 1, 2, 3 號卡片各兩張，假設每一張卡片被取中的機會相等，求取出兩張時，此兩張卡片上數字積的期望值 = ?

- (1)  $\frac{58}{15}$
- (2)  $\frac{5}{15}$
- (3) 4
- (4)  $\frac{25}{15}$
- (5)  $\frac{25}{6}$

二、多重選擇題：(21分)

說明：第3至5題，每題各有5個選項，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1.4分；每答錯一個，倒扣1.4分，完全答對者得7分，未答者，不給分亦不扣分。若在被答選項以外之區域劃記，一律倒扣1.4分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 設多項式  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$ ，下列敘述何者正確？
- (1)  $b = 10$
  - (2)  $f(2+i) = f(2-i)$
  - (3)  $f(1+\sqrt{2}) = f(1-\sqrt{2})$
  - (4)  $f(x) = 0$  在 2 與 3 之間至少有一實根
  - (5)  $f(2.1) = -4.108$
4. 設兩個球心相同的球面為  $S_1$ 、 $S_2$ ，其中  $S_2$  半徑是  $S_1$  半徑的 3 倍，假設有一平面  $E$  與  $S_1$  相交的圓之面積為  $15\pi$ ，則平面  $E$  與  $S_2$  相交的圓面積為  $a\pi$ ，請問  $a$  有可能為下列哪一個值？
- (1) 45
  - (2) 135
  - (3) 140
  - (4) 150
  - (5) 200
5. 衛生機關針對市售零食的熱量與含鈉量做了一個抽查，共有 20 個樣本，下圖是這 20 個樣本熱量與含鈉量的散布圖，根據這個散布圖，請問下列敘述何者是正確的？



- (1) 這些樣本含鈉量的中位數為 140 毫克 / 100 克
- (2) 這些樣本含鈉量的標準差大於 45 毫克 / 100 克
- (3) 這些樣本熱量的中位數介於 200~225 大卡 / 100 克
- (4) 這 20 個樣本熱量與含鈉量的相關係數是一個正數
- (5) 若對這 20 個樣本熱量 ( $x$ ) 與含鈉量 ( $y$ ) 找最佳 (最適) 直線  $y = ax + b$ ，則此直線的斜率會等於樣本熱量與含鈉量的相關係數

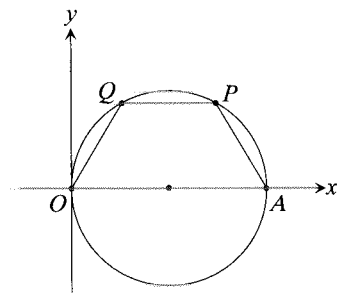
三、選填題：(42 分)

說明：第 A 至 F 題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (6-19) 中標示答案。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

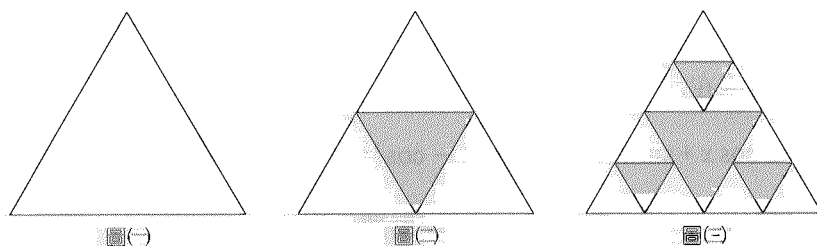
A. 設  $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{11} & \sin(\frac{-5\pi}{11}) \\ \sin \frac{5\pi}{11} & \cos \frac{5\pi}{11} \end{bmatrix}$ ，試求滿足  $A^n = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  的最小自然數  $n = \underline{\textcircled{6}\textcircled{7}}$ 。

B. 某次考試共有 20 題，每一題均為有 5 個選項的單選題，小華評估這份試卷發現有 8 題他完全會且一定答對，有 6 題他只確定一個選項不是答案，於是他就隨意猜答其它選項；有 6 題他只確定二個選項不是答案，於是他就隨意猜答其它選項，若某個題目小華答對了，則此題不是隨意猜答的機率為  $\frac{\textcircled{8}\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(請將答案化成最簡分數)

C. 已知圓的方程式為  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ，四邊形  $OAPQ$  為圓內接梯形，底邊  $AO$  為圓的直徑且  $A、O$  在  $x$  軸上，現在有一個橢圓以  $O、A$  為焦點，且通過  $P、Q$  兩點，若  $PQ = 1$ ，則此橢圓的長軸長等於  $\textcircled{12} + \sqrt{\textcircled{13}}$ 。



D. 圖(一)為邊長等於 1 的正三角形且面積為  $a_0$ ，現將其每邊中點連接起來挖去中間較小的正三角形，得到剩下的部分面積為  $a_1$  (如圖(二))。將圖(二)其餘的小正三角形每邊中點連接起來挖去中間較小的正三角形，得到剩下的部分面積為  $a_2$  (如圖(三))。重複上述的動作……，試問挖去第  $\textcircled{14}\textcircled{15}$  次後所餘小正三角形面積總和  $a_n$  會開始小於圖(一)的三角形面積的  $\frac{1}{100}$ 。(  $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$  )



E. 設  $P(x, y, z)$  為球面上  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上的動點，另有兩定點  $A(1, 1, 0)、B(2, 1, 1)$ ，則  $\triangle ABP$  面積的最小值 =  $\frac{1}{2}(\sqrt{\textcircled{16}} - \sqrt{\textcircled{17}})$ 。

- F. 南亞地區於 2004 年 12 月 26 日發生規模 9 級的地震並引發海嘯，造成巨大的災害，K 市市政府爲了防止海嘯造成的損害，預計在海岸邊修築一道防護牆以保障市民的安全，根據專家模擬出的海嘯最大浪高公式如下：若引發海嘯的地震規模爲  $x$  級，海岸與震央距離  $y$  公里，則攻擊該地的海嘯最大浪高爲  $h = ax - \frac{b}{2} \cdot \log_{10} y + c$  (公尺)，其中  $a, b, c$  爲正整數。根據此次規模 9 級的地震在各地引發的海嘯高度資料：距震央 100 公里遠的普吉島，最大浪高爲 10 公尺，距震央 1000 公里遠的印度，最大浪高爲 8.5 公尺，距震央 10000 公里遠的索馬利亞，最大浪高爲 7 公尺。現在 K 市市政府希望防護牆能阻擋 10000 公里外太平洋海底規模 9.5 級的地震所引發的海嘯，而安全防護牆的高度應比最大浪高多 2.5 公尺，請問根據專家模擬出的海嘯最大浪高的公式，K 市市政府的海嘯安全防護牆高度應設計爲 1819 公尺。

第貳部分：非選擇題 (25 分)

說明：第 1 及第 2 題為計算證明題，請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號，並寫出演算過程，每題配分標於題末。

- 將  $xy$  坐標平面上橢圓  $\Gamma: 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$  標準化，先將坐標原點平移至  $O'$  點，得到  $x'y'$  坐標系，而將  $\Gamma$  的方程式化成  $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + f' = 0$  的形式；再將  $x'y'$  坐標系的坐標軸旋轉  $\theta$  角度 (設  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )，而得到  $x''y''$  坐標系，最後  $\Gamma$  的方程式化成  $\frac{x''^2}{m} + \frac{y''^2}{n} = 1$  的形式。
  - 求  $\Gamma$  在  $x''y''$  坐標平面上之方程式，與  $\Gamma$  的短軸所在直線的方程式 (相對於  $xy$  坐標系) (6 分)。
  - 與  $\Gamma$  共焦點的雙曲線通過  $x-y$  坐標平面上的點  $P(2, 0)$ ，試求點  $P$  在  $x''y''$  平面上的坐標 (3 分)，並求此雙曲線在  $x''y''$  平面上之方程式 (6 分)。
- 設三角方程式  $2 \sin x + 2 \cos x + \sin x \cos x - \sin^3 x - \cos^3 x = 1$ ，其中  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ，若我們令  $\sin x + \cos x = t$ ，則可得到  $|t| \leq \sqrt{2}$ ，試回答下面問題：
  - 試將此三角方程式表成  $t$  的三次方程式。(3 分)
  - 試解(1)中三次方程式的所有實根。(3 分)
  - 試求滿足此三角方程式的  $x$  值。(4 分)

北區公立高中九十三學年度第二學期第一次模擬考試(數學甲)解答

第壹部份：

一、單一選擇題

1、(5)      2、(1)

二、多重選擇題

3、(3)(4)(5)      4、(2)(3)(4)(5)      5、(1)(3)(4)

三、選填題

A、22      B、 $\frac{16}{23}$       C、 $1+\sqrt{3}$       D、17      E、 $\frac{1}{2}$

F、10

第貳部份：非選擇題

1、(1)  $6x^{n^2} + y^{n^2} = 6$  ,  $y+2 = \frac{1}{2}(x-1)$       (2)  $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$  ,  $\frac{x^{n^2}}{-4} + \frac{y^{n^2}}{1} = 1$

2、(1)  $t^3 + t^2 + t - 3 = 0$       (2) 1      (3)  $\frac{\pi}{2}$