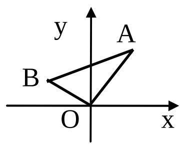
北一女中93學年第二學期第一次期中考高三數學(乙)試卷

(一)多重選擇題 (每題12分，共計36分)



1.如右圖,坐標平面上, ΔOAB 的三邊長 $\overline{OA}=5, \overline{OB}=3, \overline{AB}=7$,

設 O(0,0), A(3,4), B(x,y)，則下列敘述何者為真?

(A)$\angle AOB=120°$ (B)$6x+8y=15$ (C)$x+yi=(-\frac{3}{10}+\frac{3\sqrt{3}}{10}i)(3+4i)$

(D)$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{3}{5}\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2.設S為滿足$X^3=X$的2階可逆方陣X所成的集合，則下列敘述何者為真?

(A)若$A\in S$,則$|\det A|=1$ (B)若$A\in S$,則$A^{-1}=A$ (C)若$A\in S$,則$(A-I_2)^3=4(A-I_2)$

(D)若$A,B\in S$,則$(AB)^{-1}=AB$

(註:detA表方陣A相應的行列式值 / I_2表2階單位方陣)

3.設$A=\begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$所定義的線性變換$T_A$將平面上P點變換到P′，則下列敘述何者為真? (A)若P, Q, R三點共線,則經T_A變換後,所得P′, Q′, R′三點共線

(B)ΔPQR經T_A變換後,所得ΔP′Q′R′與ΔPQR等面積

(C)T_A為先繞原點旋轉$\cos^{-1}\frac{3}{5}$,再對y=x直線作鏡射的線性變換

(D)若P經T_A變換到P′，則P′經T_A變換到P

(二)填充題 (每格6分，共計54分)

1.設矩陣$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，則AB=__(A)__ .

2.設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，試回答下列問題:

(1)若矩陣X, Y滿足條件: 2X+3Y=A, X+Y=B，則X-Y=__(B)__ .

(2)試求B^{-1}=__(C)__ (3)若矩陣X滿足條件: XB=A，則X=__(D)__ .

(4)試求$A^4+A^3-A^2-A$=__(E)__ .

3.設矩陣$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的反矩陣$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$，則$x_{32}$=__(F)__ .

4.設矩陣$A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$. 若$A^5(\theta)=I_2$，則θ=__(G)__ .

5.平面上圓C:$x^2+y^2+4y=0$繞原點旋轉60°,得圓C′，則C′方程式為__(H)__.

6.設平面上的推移變換將P(1,2)變換到P′(5,2)，則直線L:3x+4y=0經此推移變換所得圖形L′的方程式為__(I)__.

(三)計算證明題 (15分)

1.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

試求(1)AB^5=? (3分) (2)BA^5=? (3分) (3)$n\in N,(2A+3B)^n$=? (9分)

北一女中 93 學年第二學期第一次期中考高三數學(乙)解答

※總分 105 分，得分超過 100 分,以 100 分計

(一)多重選擇題 (每題 12 分，共計 36 分)

※每題有 4 個選項,各自獨立計分. 對於每一選項,若選擇正確,得 3 分; 若選擇錯誤,得 0 分,但不倒扣.

題號	A	B	C	D
1.	■	□	■	□
2.	■	■	■	□
3.	■	■	□	■

(二)填充題 (每格 6 分，共計 54 分)

(A) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$	(B) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 13 & 22 \end{bmatrix}$	(C) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$	(D) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$	(E) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(F) $-\frac{2}{3}$	(G) $\frac{4\pi}{5}$	(H) $(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=4$	(I) $3x-2y=0$	

(三)計算證明題 (15 分)

1.(1)① $A^2=A \Rightarrow A^n=A,\ n\in N$ ② $B^2=O_2 \Rightarrow B^n=O_2,\ n\in N, n\geq 2$ ③ $AB=O_2$ ④ $BA=B$

由上述結論知: $AB^5=AO_2=O_2$ (或由 $AB^5=(AB)B^4=O_2$,亦可得解) (3 分)

(2)同理知: $BA^5=BA=B$ (3 分) (註: O_2 表零矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

(3)(9 分)

(解一)考慮 $(2A+3B)^n$ 展開的諸項(共 2^n 項): (此處二項式定理並不適用!)

① $\overbrace{2A\cdot 2A\cdots 2A}^{n個}=2^nA^8=2^nA$ ② $3B\cdot\overbrace{2A\cdot 2A\cdots 2A}^{n-1個}=3B\cdot 2^{n-1}A=2^{n-1}\cdot 3B$

③其他 2^n-2 項的連乘式均有「…$\underline{3B\cdot 3B}$…」或「…$\underline{2A\cdot 3B}$…」,知該項為 O_2

$\Rightarrow (2A+3B)^n=2^nA+2^{n-1}\cdot 3B=2^{n-1}(2A+3B)=2^{n-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

(解二)觀察、歸納 $(2A+3B)^n$ 的規律: $(2A+3B)^2=2\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, $(2A+3B)^3=4\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$,

$(2A+3B)^4=8\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$,……,猜測 $(2A+3B)^n=2^{n-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$,並利用數學歸納法檢證:

① $n=1$ 時, $2A+3B=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, 成立

②設 $n=k$ 時成立,即 $(2A+3B)^k=2^{k-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, 考慮 $n=k+1$ 時,

$(2A+3B)^{k+1}=2^{k-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}=2^{k-1}\cdot 2\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}=2^k\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, 成立

由數學歸納法原理得證 $(2A+3B)^n=2^{n-1}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, $\forall n\in N$

(若僅猜測 $(2A+3B)^n$ 的規律,即填寫答案,未加以檢證,得 3 分)

(解三)若同學找一可逆方陣P,使得 $P^{-1}(2A+3B)P=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$,求得 $(2A+3B)^n=P\begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}P^{-1}$

(固有值與對角化的思路), 請老師自行斟酌同學作答情形給分.