

北一女中九十三年度第二學期高三數學(甲) 第一次段考試題卷

一、多重選擇題：(30分，每題10分，每個選項2分，採獨立給分)

1、試判斷下列各數列 $\{a_n\}$ 何者為收斂？

(A)  $\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  (B)  $\{a_n\} = \left\{ \frac{10^{2005}}{2^n} \right\}$  (C)  $\{a_n\} = \{\sin n\pi\}$  (D)  $\{a_n\} = \left\{ \frac{\sin n}{n} \right\}$  (E)  $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \right\}$

2、設 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 為二數列，則下列敘述何者是錯誤？

(A)  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均收斂 $\Leftrightarrow \{a_n + b_n\}$ 收斂 (B)  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均收斂 $\Leftrightarrow \{a_n \cdot b_n\}$ 收斂

(C) 若 $\{a_n\}$ 收斂、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L (L \neq 0)$ 且 $\{b_n\}$ 發散，則 $\{a_n \cdot b_n\}$ 發散

(D) 若 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均發散，則 $\{a_n \cdot b_n\}$ 發散 (E) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = L^2 (L \neq 0)$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

3、已知函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ k, & x = 3 \end{cases}$ ， $k \in R$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(A) 無論 $k$ 值為何， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$  (B) 無論 $k$ 值為何， $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = k$  (C) 無論 $k$ 值為何，

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$  (D) 無論 $k$ 值為何， $f(x)$ 在 $x = 3$ 必定連續 (E) 當 $k = 6$ 時， $f(x)$ 在 $x = 3$ 才會連續

二、填充題(60分，每格6分)

1、試求下列極限：(若無極限值請回答“不存在”)

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 1}{2n^2 + n + 7} = \underline{\hspace{2cm}} \text{(A)}$  (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n+1}{n} + (-1)^n \cdot \frac{2005}{n} \right\} = \underline{\hspace{2cm}} \text{(B)}$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - n \right) = \underline{\hspace{2cm}} \text{(C)}$

2、若數列 $\{a_n\}$ 收斂，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-3)^n \cdot a_n}{2^n - (-3)^n} = \frac{2}{3}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}} \text{(D)}$

3、試求下列極限：(若無極限值請回答“不存在”)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{(E)}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{4}{x-4} \right) = \underline{\hspace{2cm}} \text{(F)}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = \underline{\hspace{2cm}} \text{(G)}$  ( $[x]$ 為高斯函數且 $[x] \leq x < [x] + 1$ )

4、設 $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + 3x + 2}$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ， $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 7$ ，則：

(1) 數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}} \text{(H)}$ ；(2)  $c + d = \underline{\hspace{2cm}} \text{(I)}$

5、已知函數 $f(x) = 8x^2 - 13x - 2$ 與 $g(x) = x^2 + kx - k^2 + k$ 兩圖形交於 $(a, b)$ 、 $(c, d)$ 兩點，若

$0 < a < 1 < c < 2$ ，

試求 $k$ 之範圍為      $\text{(J)}$

三、證明計算題(10分)

設數列 $\{a_n\}$ 定義如下：
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

(1) 試證明：數列 $\{a_n\}$ 有上界3。 (4分)

(2) 試證明： $a_n \leq a_{n+1}$ ， $n$ 為任意正整數 (3分)

(3) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$  (3分)

北一女中九十三年度第二學期高三數學(甲) 第一次段考答案卷

班級\_\_\_\_\_ 座號\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

一、多重選擇題：(30分，每題10分，每個選項2分，採獨立給分)

1、(A)(B)(C)(D)	2、(A)(B)(D)(E)	3、(A)(C)(E)
----------------	----------------	-------------

二、填充題(60分，每格6分)

(A) $\frac{3}{2}$	(B) 1	(C) -1	(D) $\frac{2}{3}$	(E) 1
(F) $\frac{1}{4}$	(G) 1	(H) (0, 3)	(I) 3	(J) $-2 < k < -1$ 或 $3 < k < 4$

三、證明計算題(10分)

設數列  $\{a_n\}$  定義如下：
$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

- (1) 試證明：數列  $\{a_n\}$  有上界 3。 (4分)
- (2) 試證明： $a_n \leq a_{n+1}$ ， $n$  為任意正整數 (3分)
- (3) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$  (3分)

答：略