

北一女中九十二學年度第一學期第二次段考高三自然組數學甲試題

一、複選題：每題 8 分

1. 設二次曲線 $\Gamma: 4x^2 - 24xy + 11y^2 + 40x + 30y - 145 = 0$ 下列何者正確？

- (1) Γ 的中心為 $(-4, -3)$ (2) Γ 的正焦弦長為 8 (3) Γ 的圖形為一拋物線
(4) 設 $P(x, y)$ 在 Γ 上，則 $(x-4)^2 + (y-3)^2$ 的最小值為 1.

2. 下列各方程式的圖形何者為一拋物線？

- (1) $\Gamma: x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 12 = 0$ (2) $\Gamma: x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 6 = 0$
(3) $\Gamma: 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ (4) $\Gamma: x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + 6y - 3 = 0$

3. 二次曲線 $\Gamma: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，當 $b^2 - 4ac = 0$ 時，下列何者可能為 Γ 的圖形？(1) 橢圓 (2) 拋物線 (3) f (4) 一直線

4. 設 A 、 B 、 C 皆為三階方陣，則有關下列各式何者成立？

- (1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (2) $A^2A^4 = A^4A^2$
(3) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ (其中 A^{-1} ， B^{-1} 存在) (4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5. 設 A 、 B 、 C 皆為三階方陣，則有關下列各式何者正確？

- (1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (2) 若 $A \cdot B = 0_3$ 則 $B \cdot A = 0_3$
(3) $A^3 + I_3 = (A + I_3)(A^2 - A + I_3)$ (4) 若 $A^2 = I_3$ 則 $A = I_3$ 或 $A = -I_3$

6. 設 $A_q = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$ 則下列各式何者正確？

- (1) $A_0 = I_2$ (2) $A_a \cdot A_b = A_{a+b}$ (3) $(A_{\frac{\pi}{6}})^{12} = -I_2$ (4) $A_q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{bmatrix}$

二、填充題：每題 8 分

1. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ 且 $AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 $X = ?$ (甲)

2. 設 $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ 且 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (1) 求 $P \cdot A \cdot P^{-1} = ?$ (乙)

(2) 試求 $A^5 = ?$ (丙)

3. 求二次曲線 $\Gamma: x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ 的正焦弦長 = ? (丁)

4. $\Gamma: 5x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 所表的二次曲線的長軸頂點座標為 ? (戊)

三、計算題：每題 10 分

1. 設 A 袋中有 2 個 10 元錢幣，B 袋中有 3 個 5 元錢幣，今從 A 袋中任取一個錢幣與 B

袋中任取一個錢幣互換，(1)若依此進行三次，求 A 袋中 10 元錢幣恰有 2 個的機率。

(2)互換無窮多次後，求 A 袋錢幣幣值的期望值。

2. 試作 $xy = 16$ 的圖形，並求對稱軸方程式。

北一女中九十二學年度第一學期第二次段考高三自然組數學甲答案卷

一、複選題：每題 8 分

1. 2, 4	2. 1, 4	3. 2, 3, 4	4. 2, 4	5. 1, 3	6. 1, 2, 4
------------	------------	---------------	------------	------------	---------------

二、填充題：每題 8 分(第 2 題每格 4 分)

1(甲) 8 分 $\begin{bmatrix} -19 & -18 & -19 \\ -8 & -5 & -7 \\ 10 & 10 & 11 \end{bmatrix}$	2(乙) 4 分 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	(丙) 4 分 $\begin{bmatrix} 876 & 1266 \\ -422 & -601 \end{bmatrix}$	3(丁) 8 分 $4\sqrt{2}$
4(戊) 8 分 $\left(1 + \frac{\sqrt{30}}{5}, 3 + \frac{2\sqrt{30}}{5}\right), \left(1 - \frac{\sqrt{30}}{5}, 3 - \frac{2\sqrt{30}}{5}\right)$			

三、計算題：每題 10 分

1. (1) $\frac{1}{12}$ (2) 14 元

2. $x + y = 0, \quad x - y = 0.$