台北區公立高中 92 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學甲試題

第壹部分：選擇題（74%）

一、單一選擇題（12%）

說明：第 1 至 2 題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零分為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 設 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a，b，c，d 爲常數，若以 x^2+x+2 除之餘 $x+3$，以 x^2+x-2 除之餘 $9x-1$，試求 $P(x)$ 除以 $x+1$ 所得之餘式爲

(1) -4

(2) -2

(3) 0

(4) 2

(5) 4

2. 設矩陣 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，滿足 $a_{ij}=\begin{cases} i\text{，當 } i>j \\ j\text{，當 } i\leq j \end{cases}$，$i$，$j=1$，$2$，$3$，其中 a_{ij} 表示 A 矩陣第 i 列第 j 行之元，若 $A^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$，則 $b_{12}+b_{22}$ 之值？

(1) -2

(2) -1

(3) 0

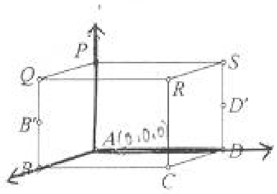
(4) 1

(5) 2

二、多重選擇題（32%）

說明：第 3 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的。請選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分；每答錯一個，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分，未答者，不給分亦不扣分。倒扣到本大題之實得分數為零分為止。

3. 已知長方體如右圖，其中$\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，$\overline{AP}=c$，設$\overline{BQ}$的中點爲B'，$\overline{DS}$的中點爲D'，則下列敘述何者正確？



(1)通過P、B'、D'之平面方程式爲$\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}+\dfrac{z}{c}=1$

(2)若P、B'、D'三點所在平面與A的距離爲h，則$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{4b^2}+\dfrac{1}{c^2}$

(3)四面體$APB'D'$之體積爲$\dfrac{1}{6}abc$

(4)$\overrightarrow{AB'}$與$\overrightarrow{AD'}$的夾角必爲銳角

(5)$\overleftrightarrow{AP}$與$\overleftrightarrow{B'D'}$之距離爲$\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

4. 若坐標平面上有一個圖形Γ：$x^2+(y-1)^2=4$，則經過下列矩陣變換後，哪些敘述是正確的？

(1)Γ經矩陣$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$變換後，所得到的新圖形與$\Gamma$對稱於直線$x-y=0$

(2)Γ經矩陣$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$變換後，所得到的新圖形爲一橢圓

(3)Γ經矩陣$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$變換後，所得到的新圖形爲一橢圓

(4)Γ經矩陣$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$變換後，所得到的新圖形爲一橢圓

(5)Γ經矩陣$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$變換後，所得到的新圖形爲一橢圓

5. 空間中有一球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$，其球心爲O，有一直線L：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{1-z}{1}$及一點$P(4,1,1)$，試問下列敘述何者正確？

(1)P點到球面S之最短距離爲$3(\sqrt{2}-1)$

(2)若$\overline{OP}$與球面S之交點爲$Q(x_0,y_0,z_0)$，則$z_0=2$

(3)球心O在直線L之投影點爲$(\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3})$

(4)若直線L與球面S交於A，B兩點，則$\overline{AB}=4\sqrt{3}$

(5)$\overline{OP}$在直線L之正射影爲$(\dfrac{8}{3},\dfrac{8}{3},-\dfrac{4}{3})$

6. 已知P爲橢圓Γ：$5x^2-6xy+5y^2=8$上一點，設F_1、F_2爲Γ的兩個焦點，且$\angle F_1PF_2=90°$，則下列敘述何者正確？
(1) $(2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$爲Γ之長軸端點坐標
(2) $(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{3}{2})$爲$\Gamma$之焦點坐標
(3)正焦弦長爲1
(4) $\triangle F_1PF_2$之周長爲$2(\sqrt{3}+2)$
(5) $\triangle F_1PF_2$之面積爲1

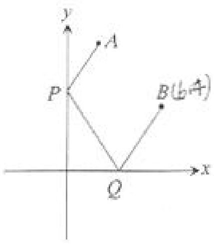
三、選填題（30%）

說明：A、B、C、D、E 五題，請在答案卡的「解答欄」之列號（⑦至㉓）中標示答案。
每一題完全答對得6分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設$0<\theta<\pi$，複數$z=1-\cos\theta+i\sin\theta$，$w=a^2+ai$，$a$爲實數，若$zw$是純虛數，則複數$w$之主幅角爲 $\frac{⑦}{⑧}\theta$ 。

B. 一次擲出三顆均勻骰子，則在至少出現一顆么點的條件下，三顆骰子點數和爲奇數的機率爲 $\frac{⑨⑩}{⑪⑫}$ 。

C. 有一款利用反射定律想法所設計而成的電腦遊戲，如右圖所示，當動點從A點$(2，8)$出發，沿著$\overleftrightarrow{AP}$朝y軸前進，在P點$(0，y_0)$碰撞y軸後，將立刻沿$\overleftrightarrow{PQ}$方向彈離y軸，直到在Q點$(x_0，0)$碰撞x軸後，再沿$\overleftrightarrow{QB}$方向彈開，並往B點前進，其中$\overleftrightarrow{AP}$，$\overleftrightarrow{PQ}$與y軸的夾角相同；$\overleftrightarrow{PQ}$，$\overleftrightarrow{QB}$與x軸的夾角相同，試求$x_0+y_0=$ $\frac{⑬⑭}{⑮}$ 。



D. 設有3位男生，8位女生圍圓桌而坐，若任2位男生之間至少有2個女生，則共有 ⑯⑰⑱⑲⑳㉑ 種方法。

E. 大明投資股票市場。假設每星期結算都損失該星期初資金的1%，而第n星期結束後資金總損失已超過原始資金的$\frac{1}{3}$，則n最小爲 ㉒㉓ 。
$(\log 2=0.3010，\log 3=0.4771，\log 11=1.0414)$

第貳部分：非選擇題（26%）

說明：第 1 與第 2 題為計算證明題，請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號，並寫出演算過程，每題配分標於題末。

1. 設多項函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$，試求下列各問題：

(1) $f(x)$ 的極大值、極小值爲何？（5%）

(2) $f(x)$ 有兩條水平切線，則此兩切線的距離爲何？（2%）

(3) $f(x)$ 圖形上斜率最小的切線方程式爲何？（4%）

(4) 若 $x^3-9x^2+15x+2+a=0$ 只有一個實根，則 a 的範圍爲何？（5%）

2. 設 $\{a_n\}$ 爲一數列，如果 c 爲某實數，且對任意正整數 n 而言，$a_n \geq c$ 都成立，則稱 c 爲數列 $\{a_n\}$ 的下界。已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n>0$ 且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})$，其中 n 爲任意正整數，$k>0$。

(1) 試證明：數列 $\{a_n\}$ 有下界。（2%）

(2) 試證明：$a_{n+1} \leq a_n$，n 爲任意正整數。（4%）

(3) 試求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。（4%）

參考公式及可能用到的數值

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

2. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

   $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

3. $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

   $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

台北區公立高中 92 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學甲答案

一、單選題

1.(1) **2.(2)**

二、多重選擇

3.(1)(2)(3)(4) **4.(1)(3)**

5.(1)(3)(5) **6.(3)(4)(5)**

三、選填題

A. $\frac{1}{2}q$ **B.** $\frac{46}{91}$ **C.** $\frac{25}{3}$ **D.483840** **E.41**

第二部份：

1.(1)極大值 9，極小值-23 **(2)** $d=32$

(3) $x=3$ **時斜率最小為 7 ， 切線** $y=-12x+29$ **(4)** $a>23$

2.

2.【詳解】(1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{k}{a_n}}=\sqrt{k}$，$\forall\, n\in N$ （2%）

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{k}{a_n})-a_n$

$=\frac{1}{2}\times\frac{k-a_n^2}{a_n}$ （1%）

$\because\ a_n\geq\sqrt{k}\ \Rightarrow\ k-a_n^2\leq 0$ （2%）

又 $a_n>0$

$\therefore\ a_{n+1}\leq a_n$ （1%）

(3)由(1)(2)知 $\{a_n\}$ 爲收斂數列

（$\because$ 實數的完備性：遞減有下界） （1%）

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$，$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\frac{k}{\alpha})$

$\Rightarrow\ \alpha^2=k\ \Rightarrow\ \alpha=\pm\sqrt{k}$ （2%）

但 $a_n\geq\sqrt{k}>0$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{k}$ （1%）