

數學甲試卷

數學甲

第 1 頁

共 4 頁

第壹部分：(75%)

一、單一選擇題 (12%)

說明：第 1 至 2 題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未答者，不給分亦不扣分。

1. 在某些電腦程式語言中，是沒有括號存在的，而其算式就是從左到右每碰到一個運算符號就加上括號，因此 $a \times b - c$ 在此種語言下表示為 $a \times [b - (c)]$ ，試問在同一語言下 $a \div b - c \times d + e$ 所表示的代數算式為何？

(1) $\frac{a}{b} - cd + e$

(2) $\frac{a}{b - cd - e}$

(3) $\frac{a}{b - cd + ce}$

(4) $\frac{a}{b - cd - ce}$

(5) $\frac{a}{b} - cd - ce$

2. 設年利率為 2.5%，若每年為一期複利計算，欲使本利和超過本金的 2 倍，求最少要幾年？（答案取整數年； $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 41 = 1.6128$ ）

(1) 24

(2) 25

(3) 26

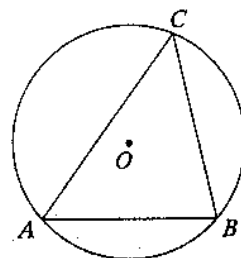
(4) 27

(5) 28

二、多重選擇題 (28%)

說明：第 3 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的。請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.4 分；每答錯一個，倒扣 1.4 分，完全答對得 7 分，未答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.4 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 如圖所示， $\triangle ABC$ 及其外接圓， h_a 、 h_b 、 h_c 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 邊上的高，下列關係式那些正確？



(1) $\frac{\overline{BC}}{\angle A} = \frac{\overline{CA}}{\angle B} = \frac{\overline{AB}}{\angle C}$

(2) $\frac{\widehat{BC}}{\angle A} = \frac{\widehat{CA}}{\angle B} = \frac{\widehat{AB}}{\angle C}$

(3) $\frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\widehat{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\widehat{CA}}{\overline{CA}}$

(4) $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$

(5) $\frac{h_a}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{h_b}{\overline{AB} \cdot \overline{BC}} = \frac{h_c}{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}$

4. 方程式 $\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8$ 表一橢圓 Γ ，其兩焦點 F_1 、 F_2 ，若點 $P(h, 3)$ 在橢圓 Γ 上，且 $h > 0$ ，則下列何者正確？

(1) Γ 的中心坐標為 $(0, 0)$

(2) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 8$

(3) $h = 4$

(4) 過 P 點的切線斜率為 -1

(5) 平分 $\angle F_1PF_2$ 的直線交 x 軸於 $(\frac{1}{2}, 0)$

5. $O(0, 0, 0)$ 、 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(0, 4, 0)$ 與 $C(0, 0, -3)$ 是空間坐標系中的四個點，平面 E 過 A 、 B 與 C 三點， O 點對於平面 E 的對稱點為 D ，下列選項何者正確？

(1) 若平面 E 的方程式為 $ax + by + cz = 6$ ，則 $a + b + c = 2.5$

(2) D 點之坐標為 $(\frac{144}{61}, \frac{72}{61}, \frac{-96}{61})$

(3) 點 $P(0, 1, \frac{23}{2})$ 到平面 E 的距離為 $\sqrt{61}$

(4) 三角形 ABC 的面積為 $2\sqrt{61}$

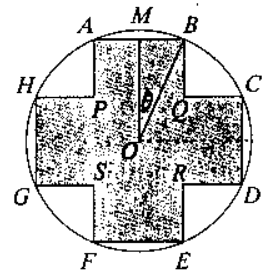
(5) 直線 AO 與直線 BC 的最短距離為 2.4

6. 一副撲克牌有 52 張，有黑桃、紅心、方塊、梅花四種花色，每種花色又各有 $A, 2, 3, \dots, 10, J, Q, K$ 等 13 張，有一種撲克牌遊戲「十點半」，規則為「 $A, 2, 3, \dots, 10$ 」分別代表「 $1, 2, 3, \dots, 10$ 」點，而「 J, Q, K 」皆為「半點」，下列敘述那些正確？
- (1)同時發 2 張牌，此 2 張牌的和為「10 點半」的組合（不計順序）有 48 種
 - (2)同時發 3 張牌，此 3 張牌的和為「10 點半」的組合（不計順序）有 200 種
 - (3)每次發 1 張牌，發下不收回，則前 2 張牌的和為「10 點半」的發法有 96 種
 - (4)每次發 1 張牌，發下不收回，則前 3 張牌的和為「10 點半」的發法有 1200 種
 - (5)每次發 1 張牌，發下不收回，則前 2 張牌或前 3 張牌的和為「10 點半」的發法有 5136 種

三、選填題 (35%)

說明：第 A 至 E 題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (⑦至⑳) 中標示答案。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

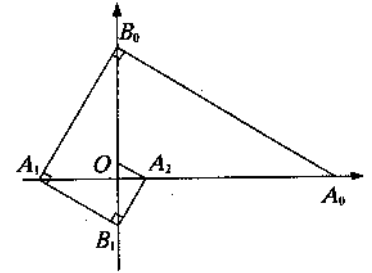
- A. 由點 $(3, 4, 5)$ 到球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ 所作的所有切線的切點將形成一圓，則此圓的半徑為 ⑦ $\frac{\sqrt{⑧}}{⑨}$ 。(答案請化簡)
- B. 已知某高中高一、高二及高三的學生人數比為 $4:3:3$ ，且各年級戴眼鏡的人數各佔全年級的 50% ， $x\%$ ， 70% （依次為高一、高二、高三），自全校學生中抽出一位，已知該生戴眼鏡，則該生是高二學生的機率為 $\frac{18}{59}$ ，求 $x =$ ⑩⑪。
- C. 已知 A 是 2 階方陣，若 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ 且 $A^4 = \begin{bmatrix} -4 & 15 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，求 $a+b+c+d =$ ⑫⑬。
- D. 空間坐標系中的三點 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(0, 1, -1)$ 、 $C(6, -3, 5)$ ，點 P 在直線 BC 上，且 \overrightarrow{AP} 在 \overrightarrow{AB} 上之正射影向量為 $(\frac{5}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{5}{3})$ ，則 P 點的坐標為 (⑭, ⑮⑯, ⑰)。
- E. 如圖，一個「凸」字型的圖形內接於半徑為 1 的圓，其中 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH}$ ， $\overline{BQ} = \overline{CQ} = \overline{DR} = \overline{RE} = \overline{FS} = \overline{SG} = \overline{HP} = \overline{AP}$ ，且 $\angle BQC = \angle ERD = \angle GSF = \angle APH = 90^\circ$ ，則陰影部分面積最大值為 ⑱ $\sqrt{⑲}$ - ⑳。



第貳部分：非選擇題（25%）

說明：第 1 及第 2 題為計算證明題，請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號，並寫出演算過程，每題配分標於題末。

1. 如右圖，設 $A_0(a_0, 0)$, $B_0(0, b_0)$ ，今過 B_0 作 $\overline{B_0A_1} \perp \overline{A_0B_0}$ ，且交 x 軸於 $A_1(a_1, 0)$ ，再過 A_1 作 $\overline{A_1B_1} \perp \overline{A_1B_0}$ ，交 y 軸於 $B_1(0, b_1)$ ，再過 B_1 作 $\overline{B_1A_2} \perp \overline{A_1B_1}$ 交 x 軸於 $A_2(a_2, 0)$ ，如此繼續下去，若 $a_0=1$, $b_0=\frac{2}{5}$ ，且 $\log_{10} 2=0.3010$ ，則



(1) 求 $a_2=?$ (3 分)

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n=?$ (6 分)

(3) 若 P 點坐標為 $(10^{-12}, 0)$ ，且 P 介於 A_n 與 A_{n+1} 兩點之間，求 n 的最大值=? (6 分)

2. 設 $f(x)=x^3+4x^2+x-6$, $g(x)=2x^3+(k-2)x^2+kx-2k$, $k \in R$ ，則

(1) 解方程式 $f(x)=0$ (3 分)

(2) 已知方程式 $(f(x))^2+(g(x))^2=0$ 有兩個相異實根 α, β ，則 $k+\alpha+\beta=?$ (7 分)

北區公立高中 92 學年度第二學期指定考科第一次模擬考

數學甲參考答案

第一部份	
1. <u>(4)</u>	11. <u>0</u>
2. <u>(5)</u>	12. <u>—</u>
3. <u>(2)(4)(5)</u>	13. <u>5</u>
4. <u>(1)(2)(5)</u>	14. <u>3</u>
5. <u>(2)(5)</u>	15. <u>—</u>
6. <u>(1)(3)(5)</u>	16. <u>1</u>
7. <u>6</u>	17. <u>2</u>
8. <u>7</u>	18. <u>2</u>
9. <u>5</u>	19. <u>5</u>
10. <u>6</u>	20. <u>2</u>

第二部份

1.(1) $a_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^4$ (2) $\frac{10}{29}$ (3)14

2.(1) $x=1, -2, -3$ (2)16