北 一 女 中 92 學 年 第 二 學 期 高 二 數 學 第 二 次 段 考 試 卷

(一)多重選擇題 (10 分)

1.設方程式：$x+y+z=6$ 有 N 組非負整數解 (x,y,z)，則下列敘述何者為真？

(A)冰箱存放蕃茄、葡萄、鳳梨的易開罐果汁分別有 7 罐、6 罐、5 罐，今取出 6 罐果汁招待訪客，則有 N 種取法

(B)將 6 個相同的汽球任意分送給甲、乙、丙三個孩童，則有 N 種分法

(C)滿足 $1\le a\le b\le c\le d\le e\le f\le 3$ 的整數數對 (a,b,c,d,e,f) 有 N 組

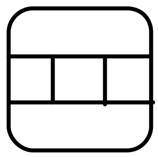
(D)同時擲 3 顆相同的骰子，則其點數出現情形有 N 種

(E)將符號□□□□□□＋＋＋作直線排列，則有 N 種排法

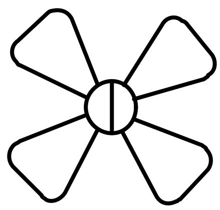
(二)填充題 (每格 6 分，共計 90 分)

1.將 $(x^2-\frac{2}{x})^6$ 展開，試求 x^6 項的係數＝ __(A)__ .

2.以 11^2 除 111^{22}，所得餘數＝ __(B)__ .



3.想要以 4 種顏色的塗料彩繪牆壁上的區域(如右圖)，為了能辨認整體圖像，規定相鄰的部分不同色，則 4 種顏料全用的配色有 __(C)__ 種



4.製作風車童玩，以 6 種顏色著塗風車一體成型的軸心兩半圓部分及四個葉片(如右圖)，且這六個部分的顏色互異，則可能的配色有 __(D)__ 種

註：葉片連同軸心迎風轉動，若經旋轉後疊合，視為同一種.

5.從 1 至 1000 的正整數中篩選出與 35 互質者，而這些篩選出的正整數中有 __(E)__ 個為 3 的倍數.

6.(1)將 ***AFFAIR*** 一字的字母任意排列，問連同原字可排出 __(F)__ 個不同的字

(2)從 ***AFFAIR*** 一字的字母中取 4 個字母排列，問可排出 __(G)__ 個不同的字

註：所謂「字」僅是一堆英文字母的排列，或許它並沒有任何意涵，請不要想太多！

7.甲、乙、丙等 7 位同學參加演講比賽，抽籤決定上台的先後

(1)甲、乙、丙三人兩兩不接連上台的情形有 __(H)__ 種

(2)甲不是第一個上台，但甲卻比乙、丙先上台的情形有 __(I)__ 種

8.從記以阿拉伯數字 1 至 9 的 9 張卡片中抽取 3 張，則依下列限定的抽取結果各有多少種？

(1)卡片上的數字乘積為偶數有 __(J)__ 種

(2)卡片上的數字乘積為 4 的倍數有 __(K)__ 種

9.6 位遊客租用 A，B，C 三艘小艇一同出遊，每艘小艇至少乘坐 1 人，已知小艇 A，B 均限乘 3 人，而小艇 C 限乘 2 人，則搭乘的情形有 __(L)__ 種

10.滿足 $x\ge 3$，$y\ge 2$，$z\ge 1$，$x+y+z\le 14$ 的整數解 (x,y,z) 有 __(M)__ 組

11.拋擲一枚錢幣 10 次，並逐次記錄其正、反面出現的情形

(1)至少出現正面 3 次的情形有 __(N)__ 種

(2)恰出現 3 次正面，而前後兩次正面之間至少間隔兩次反面的情形，例如：

依次出現反、正、反、反、反、正、反、反、正、反面 或

正、反、反、反、反、正、反、反、正、反面 等

總共有 __(O)__ 種

(三) ***MONEY BALL***：(30 **分**)

※**如果你行有餘力**,**可嘗試挑戰下列問題**:

1.**「以正十二邊形的對角線為邊可作出多少個三角形?」應該是你熟悉的問題**,**其實以正** n **邊形的對角線為邊可作出** $\dfrac{n\cdot C_{m}^{n-m}}{n-m}$ **個凸** m **邊形**, $(3\le m\le \frac{n}{2})$**請說明此一結論** (14 **分**)

註:**凸多邊形的任意兩頂點的連線段均落在其所圍封閉區域**(**含邊界**)**內**

2.**棒球錦標賽有** A、B、C、D、E 5 **隊參加**,**初賽採單循環制**,**於連續** 5 **天的上、下午各安排一場比賽**,**而顧及體力負荷**,**以確保比賽的公平性**,**賽程安排時**,**避免某一隊於同一天出賽兩場**, **則賽程安排有多少種**? (16 **分**)

北 一 女 中　93 學 年 第 二 學 期 高 二 數 學 第 二 次 段 考 解 答

(一)多重選擇題 (10 分)

1.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
	□	■	■	□	□

(二)填充題 (每格 6 分，共計 90 分)

A. ***60***	*B*. ***1***	*C*. ***48***	*D*. ***360***	*E*. ***229***
F. ***180***	*G*. ***102***	*H*. ***1440***	*I*. ***960***	*J*. ***74***
K. ***54***	*L*. ***330***	*M*. ***165***	*N*. ***968***	*O*. ***20***

(三) ***MONEY BALL***：(30 分)

✡以下僅為參考答案，若學生採不同的解題策略,請老師自訂評分標準

1.❶設正 n 邊形的頂點逆時針依次為 $P_1,P_2,\ldots,P_n$. 今自其中選取 m 個點 $P_{k_1},\ldots,P_{k_m}$ $(1\le k_1<\ldots<k_m\le n$,k_{i+1} 與 k_i 非連續整數,$i=1,\ldots,m-1$,且 $(k_1,k_m)\ne(1,n))$,則恰得一個以此正 n 邊形的對角線為邊的凸 m 邊形,其頂點逆時針依次為 $P_{k_1},\ldots,P_{k_m}$

❷$P_1,P_2,\ldots,P_n$ 順次排列,$P_{k_1},\ldots,P_{k_m}$ 以√劃記,其餘的點以×劃記,則原問題轉化如下:

「m 個√與 n-m 個×排一列,限定√,√兩兩不相鄰,且第一位及第 n 位不得均排√」

❸m 個√與 n-m 個×排一列,限定√,√兩兩不相鄰有 C_m^{n-m+1} 種,而其中第一位及第 n 位均排√有 C_{m-2}^{n-m-1} 種,知:排法有 $C_m^{n-m+1}-C_{m-2}^{n-m-1}$ 種,即有 $C_m^{n-m+1}-C_{m-2}^{n-m-1}$ 個凸 m 邊形

❹ $$C_m^{n-m+1}-C_{m-2}^{n-m-1}=\frac{(n-m+1)!}{m!(n-2m+1)!}-\frac{(n-m-1)!}{(m-2)!(n-2m+1)!}$$

$$=\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m+1)!}((n-m+1)(n-m)-m(m-1))=\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m+1)!}(n-2m+1)n$$

$$=\frac{n}{n-m}\cdot\frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!}=\frac{n}{n-m}\,C_m^{n-m}$$

2.❶每一隊於連續五天內恰有四天出賽,一天輪空,而每天恰有一隊輪空

❷就某一隊(例如 A 隊)而言,對戰組合 A,B、A,C、A,D、A,E 及 A 輪空安排於賽程的第一至五天有 5!種情形

❸針對❷的安排情形,分析每天輪空的隊伍,以決定當天另一組對戰組合:

1°A,B 對戰當天,C 或 D 或 E 可能輪空,可設 C 輪空 (相同方法討論 D 或 E 輪空)

則 A,C 對戰當天,D 或 E 可能輪空(見註①),可設 D 輪空 (相同方法討論 E 輪空)

註①:若 A,C 對戰當天,B 輪空,則 A,C 對戰當天與 A,B 對戰當天的另一對戰組合均為 D,E,與單循環賽制不合,知:A,C 對戰當天,B 不可能輪空

2°若 A,B 對戰當天,C 輪空;A,C 對戰當天,D 輪空,則 A,D 對戰當天,E 必輪空(見註②),進而確定 A,E 對戰當天,B 輪空

註②:若 A,D 對戰當天,C 輪空,則 A,D 對戰當天與 A,C 對戰當天的另一對戰組合均為 B,E,與單循環賽制不合;若 A,D 對戰當天,B 輪空,則 A,E 對戰當天,E 輪空,得出矛盾,知:A,D 對戰當天,輪空隊伍必為 E

由 1°,2°分析知:這五天內每日輪空隊伍的安排有 $3\times2=6$ 種

❹經檢驗知:當❸每日輪空隊伍確定後,A 出賽日的另一對戰組合隨之確定,而 A 輪空日的 2 組對戰組合亦確定

❺將比賽當天的兩個對戰組合安排於上、下午出賽有 2^5 種

⇒賽程安排有 $5!\times6\times2^5=$***23,040*** 種