

# 臺北區公立高中 91 學年度第一學期第二次學科能力測驗

## 第一部分：選擇題

### 壹、單一選擇題

說明：第 1 至 6 題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 設圓  $C: x^2 + y^2 - 10x + 10y + 45 = 0$ ，則下列那一直線與圓  $C$  恰有兩個交點？

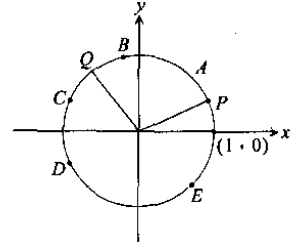
- (1)  $2x - y = 0$
- (2)  $x - y = 0$
- (3)  $x + y = 0$
- (4)  $2x + y = 0$
- (5)  $x + 2y = 0$

2. 下列何數最接近  $631^7$ ？已知  $\log 6.30 = 0.7993$ ， $\log 6.31 = 0.8000$

- (1)  $63^8$
- (2)  $63^9$
- (3)  $63^{10}$
- (4)  $63^{11}$
- (5)  $63^{12}$

3. 複數  $z$ ， $w$  在複數平面上所對應的點分別是單位圓上的  $P$ 、 $Q$  兩點，則  $z \cdot w$  在複數平面上所對應的點應為：

- (1)  $A$
- (2)  $B$
- (3)  $C$
- (4)  $D$
- (5)  $E$



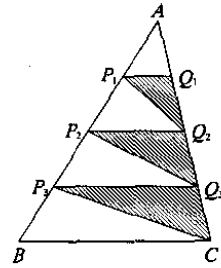
4. 若球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 100^2$  被三平面， $E_1: x + y + z = 3$ ， $E_2: 3x - 2y + z = 0$ ，

$E_3: 3x - 7y - z = -9$  切割成幾部分？

- (1) 8
- (2) 7
- (3) 6
- (4) 5
- (5) 4

5. 如圖中， $P_1, P_2, P_3$ 三點與 $Q_1, Q_2, Q_3$ 三點分別四等分 $\triangle ABC$ 的兩邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ ，則三個有陰影的部分之面積和 $\triangle ABC$ 面積的比值為：

- (1)  $\frac{1}{2}$   
 (2)  $\frac{3}{8}$   
 (3)  $\frac{3}{7}$   
 (4)  $\frac{4}{7}$   
 (5)  $\frac{5}{8}$



6. 設甲箱中有分別編號1, 2, 3, 4, 5的白球共5個，乙箱中有分別編號4, 5, 6, 7的紅球共4個，現在自甲、乙兩箱中隨機各取一球，如果兩球數字相同可得獎金100元，白球的數字大於紅球的數字可得獎金500元，試問抽取一次所得獎金的期望值為：

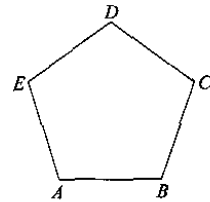
- (1) 10元  
 (2) 15元  
 (3) 25元  
 (4) 35元  
 (5) 50元

**貳、多重選擇題**

說明：第7至12題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得5分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲2.5分，錯兩個或兩個以上不給分。

7. 設 $ABCDE$ 為正五邊形，那麼下列向量內積中何者最小？

- (1)  $\overline{AB} \cdot \overline{AB}$   
 (2)  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$   
 (3)  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$   
 (4)  $\overline{AB} \cdot \overline{DE}$   
 (5)  $\overline{AB} \cdot \overline{EA}$



8. 正六邊形 $ABCDEF$ 中， $A(0, 0), B(1, 0)$ 且 $C$ 在第一象限，若直線 $CD$ 的方程式為 $ax+y=b$ ，則下列敘述何者正確？

- (1)  $a < 0$   
 (2)  $b > 0$   
 (3)  $|a| < 2$   
 (4)  $|b| < 2$   
 (5)  $2a = b$

9. 有 60 張卡片分別記上 1 到 60 的正整數，現在甲取走 5 的倍數之卡片，乙再由剩下的卡片中取走 3 的倍數之卡片，丙又由剩下的卡片中取走 2 的倍數之卡片，最後剩下的卡片給了丁，若甲、乙、丙、丁所得卡片張數分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  張，則下列何者正確？
- (1)  $a < b$
  - (2)  $b = c$
  - (3)  $b < d$
  - (4)  $c < d$
  - (5)  $a = d$
10. 已知空間中直線  $L$  通過  $A(0, -4, 2)$ 、 $E(3, 2, -1)$ ，則下列敘述何者正確？
- (1) 點  $P(1, -2, 1)$  在直線  $L$  上
  - (2) 直線  $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$  與  $L$  恰相交於一點
  - (3) 直線  $L_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$  與  $L$  平行
  - (4) 平面  $E_1: x+2y-z=0$  與  $L$  平行
  - (5) 平面  $E_2: 5x-4y-3z=10$  與  $L$  恰相交於一點
11. 將多項函數  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 11x - 15$  表為  $f(x) = a(x-h)^4 + b(x-h)^3 + c(x-h)^2 + d(x-h)$  其中  $a, b, c, d, h$  均為整數，則下列何者正確？
- (1)  $h = -3$
  - (2)  $a = 1$
  - (3)  $b = 9$
  - (4)  $c = 25$
  - (5)  $d = 26$
12. 平面  $E: z=0$  與球面  $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 18$  及  $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$  分別截成圓  $C_1$  及  $C_2$ ，若  $P, Q$  分別為圓  $C_1, C_2$  上的點，則下列敘述何者正確？
- (1)  $C_1$  的圓心為  $(0, 0, 0)$
  - (2)  $C_1$  的半徑為  $3\sqrt{2}$
  - (3)  $C_2$  的半徑為  $\sqrt{2}$
  - (4)  $\overline{PQ}$  的最短距離為  $\sqrt{2}$
  - (5)  $\overline{PQ}$  的最長距離為  $4\sqrt{2}$

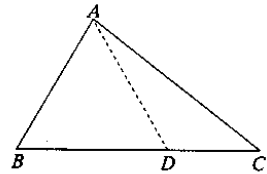
第二部分：填充題

說明：(1)第 A 至 H 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (13~28)。

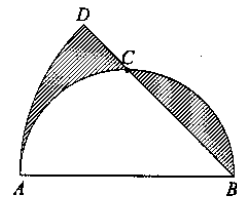
(2)每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 已知大樓的水塔是稜長為  $a$  呎的正立方體 ( $a$  為整數)，由於時隔多年，水塔上標示容積的數字： $***3$  (立方呎)，僅能辨認個位數字為 3，則  $a$  值為 ⑬⑭。

- B. 有一個三角形  $ABC$  (如右圖)，已知  $\overline{AB}=5$ ,  $\overline{BC}=8$ ,  $\overline{CA}=7$ ，若  $\overline{BC}$  上有一點  $D$ ，將  $\overline{BC}$  分成兩段，使得  $\overline{BD}=5$ ,  $\overline{DC}=3$ ，則  $\overline{AD}$  之長為 ⑮。

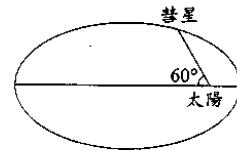


- C. 右圖中， $\overline{AB}=20$ ，以  $\overline{AB}$  為直徑的半圓， $C$  為弧  $AB$  之中點，今以  $B$  為圓心， $\overline{AB}$  為半徑作一圓弧與直線  $BC$  交於  $D$  點，則斜線部分的面積為 ⑯⑰  $\pi - 100$ 。



- D. 設  $0 \leq x < 2\pi$ ，且滿足方程式  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ ，則  $x$  的最大值為 ⑱⑲  $\frac{\pi}{12}$ 。

- E. 某一彗星之軌道為一橢圓，而以太陽為焦點。設此彗星與太陽之最近距離為 100 萬公里，最遠距離為 700 萬公里，則當此彗星與太陽之連線和橢圓的長軸成  $60^\circ$  夾角時 (如右圖)，彗星與太陽的距離為 ⑳㉑㉒ 萬公里。



- F. 有 6 張卡片，分別記以數字 1, 2, 2, 3, 3, 3，現在自此 6 張卡片中任取 3 張，再由左而右排成一個三位數，則能排出 ㉓㉔ 種不同的三位數。

- G. 有 5 位同學的數學成績分為 77 分，65 分，79 分，91 分及  $k$  分，若此五數的算術平均數與中位數相等，則  $k$  可能的最大值為 ㉕㉖。

- H. 已知袋中有 3 個黑球，4 個白球，今自袋中隨機取球，每次取出一球，取出後不放回，而在有一種色球被取完時就停止，則恰取 5 球的機率為 ㉗  $\frac{27}{28}$ 。

# 臺北區公立高中 91 學年度第一學期第二次學科能力測驗參考解答

## 第一部分：選擇題

### 壹、單一選擇題

#### 1. 參考答案：(3)

解答說明：因  $C: (x-5)^2 + (y+5)^2 = 5$

由圓心  $A(5, -5)$  到各直線的距離，得知依序為：  
相離，相離，相交兩點，相切，相切

#### 2. 參考答案：(4)

解答說明：因  $\log 631^7 = 7 \cdot 2.8000 = 19.6$

而  $\log 63^8 = 8 \cdot 1.7993 = 14.3944$

$\log 63^9 = 9 \cdot 1.7993 = 16.1937$

$\log 63^{10} = 10 \cdot 1.7993 = 17.993$

$\log 63^{11} = 11 \cdot 1.7993 = 19.7923$

$\log 63^{12} = 12 \cdot 1.7993 = 21.5916$

#### 3. 參考答案：(3)

解答說明：設  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$w = \cos \beta + i \sin \beta$

由  $z \cdot w = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

知  $z \cdot w$  在複數平面上相對應的點為  $C$  點

#### 4. 參考答案：(3)

解答說明：因  $E_1, E_2, E_3$  三平面相交於同一直線  
將球面切割成 6 部分

#### 5. 參考答案：(2)

解答說明：設  $\overline{BC}$  的高為  $h$ ，則  $\triangle ABC = \frac{1}{2} ah$

而  $\triangle P_1Q_1Q_2 + \triangle P_2Q_2Q_3 + \triangle P_3Q_3C$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4}a + \frac{2}{4}a + \frac{3}{4}a \right) \cdot \frac{1}{4}h$$

$$= \frac{3}{16} ah = \frac{3}{8} \triangle ABC$$

#### 6. 參考答案：(4)

解答說明：兩球數字相同的機率為  $\frac{1}{10}$

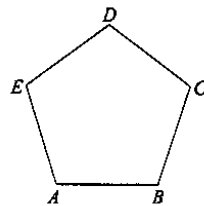
白球數字大於紅球數字的機率為  $\frac{1}{20}$

得期望值為  $\frac{1}{10} \times 100 + \frac{1}{20} \times 500 = 35$  (元)

貳、多重選擇題

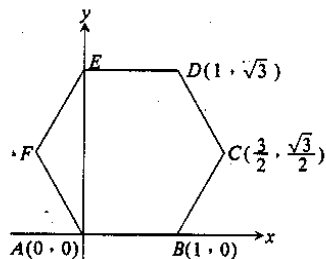
7. 參考答案：(3)(4)

$$\begin{aligned} \text{解答說明：} \overline{AB} \cdot \overline{AB} &= |\overline{AB}|^2 \\ \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= |\overline{AB}|^2 \cdot \cos 72^\circ \\ \overline{AB} \cdot \overline{CD} &= |\overline{AB}|^2 \cdot \cos 144^\circ \\ \overline{AB} \cdot \overline{DE} &= |\overline{AB}|^2 \cdot \cos 144^\circ \\ \overline{AB} \cdot \overline{EA} &= |\overline{AB}|^2 \cdot \cos 72^\circ \end{aligned}$$



8. 參考答案：(2)(3)(5)

$$\begin{aligned} \text{解答說明：} \text{因 } C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), D(1, \sqrt{3}) \\ \text{得直線 } CD \text{ 的斜率為 } -\sqrt{3} \\ \text{得直線 } CD \text{ 的方程式為 } \sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3} \\ \text{知 } a = \sqrt{3}, b = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



9. 參考答案：(1)(2)

$$\begin{aligned} \text{解答說明：} \text{甲的卡片有 } \frac{60}{5} &= 12 \text{ (張)} \\ \text{乙的卡片有 } \frac{60}{3} - \frac{60}{15} &= 16 \text{ (張)} \\ \text{丙的卡片有 } \frac{60}{2} - \frac{60}{6} - \frac{60}{10} + \frac{60}{30} &= 16 \text{ (張)} \\ \text{丁的卡片有 } 60 - 12 - 16 - 16 &= 16 \text{ (張)} \end{aligned}$$

10. 參考答案：(1)(2)

- 解答說明：
- (1) 點  $P(1, -2, 1)$  在直線  $L$  上
  - (2)  $L_1$  和  $L$  相交於  $(1, -2, 1)$
  - (3)  $L_2$  和  $L$  重合
  - (4)  $E_1$  和  $L$  相交於一點
  - (5)  $L$  在  $E_2$  上

11. 參考答案：(1)(2)(4)

$$\begin{aligned} \text{解答說明：} f(x) &= (x+3)^4 - 9(x+3)^3 + 25(x+3)^2 - 26(x+3) \\ \text{得 } a &= 1, b = -9, c = 25, d = -26, h = -3 \end{aligned}$$

12. 參考答案：(1)(2)(3)(4)

$$\begin{aligned} \text{解答說明：} C_1 \text{ 的圓心 } A(0, 0, 0), \text{ 半徑 } r_1 &= 3\sqrt{2} \\ C_2 \text{ 的圓心 } B(1, 1, 0), \text{ 半徑 } r_2 &= \sqrt{2} \\ \text{故由 } \overline{AB} = \sqrt{2}, \text{ 得 } \overline{PQ} \text{ 最短距離 } &\sqrt{2} \\ \overline{PQ} \text{ 的最長距離 } &5\sqrt{2} \end{aligned}$$

第二部分：填充題

A. 參考答案：17

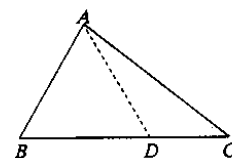
$$\begin{aligned} \text{解答說明：} 10 \leq a \leq 21, \text{ 其中 } a^3 \text{ 除以 } 10 \text{ 得餘數為 } 3 \\ \text{而知 } a = 17 \end{aligned}$$

B. 參考答案：5

解答說明：由餘弦定理得  $\angle B = 60^\circ$

而  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{BD} = 5$ ,

故  $\triangle ABD$  為正三角形，即  $\overline{AD} = 5$

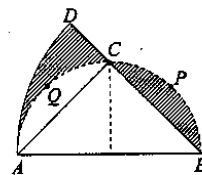


C. 參考答案：50

解答說明：因弓形  $BPC$  與弓形  $AQC$  等面積

斜線部分的面積為

扇形  $ABD - \triangle ABC = 50\pi - 100$



D. 參考答案：13

解答說明： $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

$$2\left(\frac{1}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = \sqrt{2}$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{即 } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{而 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{故 } x - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi, \text{ 即 } x \text{ 的最大值為 } \frac{13}{12}\pi$$

E. 參考答案：280

解答說明：因  $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 800$

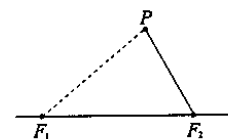
$$\overline{F_1F_2} = 700 - 100 = 600$$

設  $\overline{PF}_2 = x$ , 則  $\overline{PF}_1 = 800 - x$

由餘弦定理知

$$\overline{PF}_1^2 = \overline{F_1F_2}^2 + \overline{PF}_2^2 - 2 \cdot \overline{F_1F_2} \cdot \overline{PF}_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\text{得 } x = 280$$



F. 參考答案：19

解答說明：三同時 3, 3, 3 有 1 種

二同時 3, 3, 1; 3, 3, 2; 2, 2, 1; 2, 2, 3 共 12 種

三異時 1, 2, 3 有 6 種

$$1 + 12 + 6 = 19 \text{ (種)}$$

G. 參考答案：83

解答說明：若  $k \geq 79$ , 則  $\frac{77 + 65 + 79 + 91 + k}{5} = 79$ , 得  $k = 83$

H. 參考答案： $\frac{2}{7}$

解答說明：在第 5 球取完黑球的機率為  $\frac{6}{35}$

在第 5 球取完白球的機率為  $\frac{4}{35}$

$$\text{故所得機率為 } \frac{6}{35} + \frac{4}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$