

# 北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學乙試題

第壹部分：(81%)

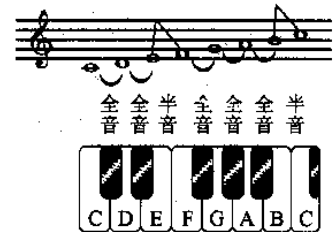
一、單一選擇題 (18%)

說明：第 1 至 3 題為單一選擇題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 1/4 題分。未答者，不給分亦不扣分。

1. 設  $w = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11}$ ，則下列各數值哪一個為最大？

- (1)  $|2+w|$
- (2)  $|2+w^3|$
- (3)  $|2+w^5|$
- (4)  $|2+w^7|$
- (5)  $|2+w^9|$

2. 上音樂課時，老師向同學們解釋：音階的結構一般採用十二平均律，它是由五個「全音」（相當於十個「半音」）和兩個「半音」所組成，見右圖。而以十二平均律所構成的音階，所有十二個半音皆以相同的音頻遞增，假設  $f$  為高半音的頻率比，其頻率音程可用等比數列  $\{1, f, f^2, f^3, \dots, f^{12}\}$  表示，且頻率加倍就可以得到高八度的音。若已知琴鍵上「D」的音頻為 293.6 (Hz)，試利用對數表求出音調「G」的音頻約為



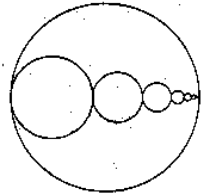
- (1) 311.1 Hz
- (2) 349.2 Hz
- (3) 369.9 Hz
- (4) 391.9 Hz
- (5) 415.3 Hz

常用對數表  $y = \log_{10} x$

x											表尾差								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19

3. 下列各選項何者正確？

- (1) 三枝筷子加以組合（不折斷）最多可以形成 8 個直角
- (2) 在一正三角形區域的內部添加三條直線，則圖形中最多可找到 17 個三角形
- (3) 某馬場中，剛滿週歲的馬每分鐘可跑場地 2 圈，剛滿兩歲的馬每分鐘可跑場地 3 圈，已成熟的駿馬每分鐘可跑場地 6 圈，若這三匹馬並排起跑，則最快 6 分鐘後三匹馬會再並排於起點
- (4) 一投資客將新購房屋的買價加 2 成出售，因乏人問津，最後以定價的 8 折讓售，則此人不賺不賠
- (5) 在圓的直徑上有許多小圓無限地連在一起（如右圖），則這些無限多個小圓的周長必小於外圍大圓的周長



## 二、多重選擇題（14%）

說明：第 4~5 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.4 分；每答錯一個，倒扣 1.4 分，完全答對得 7 分，未答者，不給分亦不扣分。

4. 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為實數，若函數  $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$  的圖形對稱於直線  $L: x = \alpha y + \beta$ ，則下列各選項何者正確？
  - (1) 直線  $L$  平行  $y$  軸
  - (2)  $n=2$  時， $\beta = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$
  - (3)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  由小至大排列可形成一等差數列
  - (4)  $\alpha + \beta = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
  - (5)  $\beta$  為  $a_1, a_2, \dots, a_n$  之中位數
  
5. 一袋中有 5 個黑球，4 個黃球，今從袋中連續取球，每次取出一球且取出後不再放回。設  $A_i$ ：第  $i$  次取出的為黑球， $B_i$ ：第  $i$  次取出的為黃球， $i=1, 2, 3, \dots, 9$ ，則下列各選項何者正確？
  - (1)  $P(A_3) > P(A_8)$
  - (2)  $P(B_4) = P(B_7)$
  - (3)  $P(A_3 \cap B_4) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$
  - (4)  $P(\text{黑球先取完}) = P(B_9) = \frac{5}{9}$
  - (5)  $P(A_2 \cap B_6) = \frac{5}{18}$

## 三、選填題 (49%)

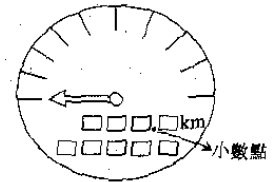
說明：A, B, C, D, E, F, G 各題為選填題，作答於答案卡之「解答欄」所標示的列號 (6-22) 內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 喬喬想知道父母親的結婚紀念日，爸爸透露為結婚當年四月第 3 個星期三，且四月中是星期三的日子加起來的和為 80。那麼，父母親的結婚紀念日是 4 月 ⑥⑦ 日。
- B. 設  $k$  為一正整數，若坐標平面上一點  $P(-2, 3)$  在圓  $x^2 + y^2 + 2kx - 6y + 3k + 13 = 0$  的外部，則符合條件之所有  $k$  值的總和為 ⑧⑨。
- C. 身體質量指數 (*Body Mass Index*, 簡稱 *BMI*) 可用來衡量自己是否該增重或減重，其計算公式如下： $BMI = \frac{\text{體重}(\text{kg})}{\text{身高}^2(\text{m}^2)}$ 。今某高中隨機抽樣 110 位高一女同學，分別計算她們的 *BMI* 值，所得結果如下表所示：(以下各組均不含上限)

<i>BMI</i> 值	<18	18~20	20~22	22~24	24~27	≥27
現象	太瘦了，該增重	有點瘦	標準身材	有點胖，要注意	太胖了，該減重	健康堪慮
人數	4	13	24	43	20	6

此時將 *BMI* 值小於 18 及不小於 27 的 10 個離群值捨棄，若剩下的 100 位女同學之平均身高為 160 公分，試估計高一女同學的平均體重大約為 ⑩⑪、⑫ 公斤。

- D. 一工匠欲用鋼板搭一空心正圓錐臺(含上、下底)，使其上底半徑為 2 公分，下底半徑為 6 公分，高度為 3 公分，則此工匠準備之鋼板面積至少需 ⑬⑭  $\pi$  平方公分。
- E. 小玉是一位數字迷，假日時爸爸開著新買的休旅車載全家至冬山河旅遊，小玉坐在前座，一路上目不轉睛地觀察爸爸如何操控車輛，她發現儀表板內有兩排數字(如右圖)，隨著車輛前行而不斷地向前累進。途中爸爸停車休息並加油，開車前小玉發現爸爸將上排數字歸零，此時下排數字為 01976。她好奇地問爸爸這兩排數字的用途，爸爸解釋說：「上排數字可以歸零，是用來測量兩定點距離的公里數，或像爸爸以它來測量車子的耗油程度；下排數字表示車輛從出廠至今駕駛的累積公里數」。小玉弄懂後又問了許多有關操控車輛的問題，不知不覺中打起瞌睡來，後來被爸爸緊急煞車所嚇醒，朦朧間看見儀表板上、下兩排數字的後四位竟一模一樣，均為 x y z 5，你能算出  $(x, y, z)$  是多少嗎？ (⑮, ⑯, ⑰)。



## 北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學乙答案

第壹部分：

一、單一選擇題

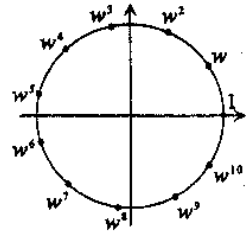
1. 參考答案：(1)

$$\text{試題解析：} w = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11} \Rightarrow w^{11} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

1 的 11 次方根為  $1, w, w^2, \dots, w^{10}$

在複數平面上均位於單位圓上且將此單位圓 11 等分

如右圖所示



$$\text{而 } |2 + (a + bi)| = |(a + bi) - (-2 + 0i)|$$

其值相當於坐標平面上  $(a, b)$  與  $(-2, 0)$  兩點之距離

由圖形知

$$\begin{aligned} |2 + w| &= |2 + w^{10}| > |2 + w^2| = |2 + w^9| > |2 + w^3| = |2 + w^8| \\ &> |2 + w^4| = |2 + w^7| > |2 + w^5| = |2 + w^6| \end{aligned}$$

2. 參考答案：(4)

試題解析： $\because$  高八度音頻為原調頻率 2 倍

$$\therefore f^{12} = 2, \text{ 即 } f = \sqrt[12]{2}$$

設中央 C 的音頻為  $k$

則 D 的音頻為  $f^2 k = 293.6$

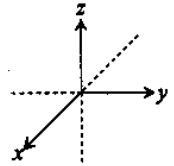
$$\text{G 的音頻為 } f^7 k = 293.6 f^5 = 293.6 \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 293.6 \times 1.335 = 391.956$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{設 } x = 2^{\frac{5}{12}} \\ \log x = \frac{5}{12} \log 2 = \frac{5}{12} \times 0.3010 = 0.1254 \doteq \log 1.335 \\ \therefore \text{取 } x = 1.335 \end{array} \right)$$

3. 參考答案：(2)

試題解析：(1) 當三枝筷子組成空間坐標系之  $x, y, z$  軸時，  
可形成最多的 12 個直角

即  $xy, yz, zx$  平面各 4 個直角



(2) 如右圖之情形知最多可找到 17 個三角形

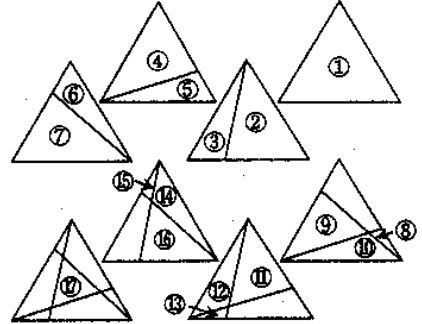
(3) 滿週歲馬、滿兩歲馬、成熟駿馬

跑一圈所需時間分別為

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \text{ 分鐘}$$

因 2, 3, 6 之最小公倍數為 6

故最快 1 分鐘後三匹馬會再並排於起點



(4)  $(1+20\%) \times 0.8 - 1 = -0.04$

故賠了買價的 4%

(5) 已知圓周長  $= \pi \times$  直徑

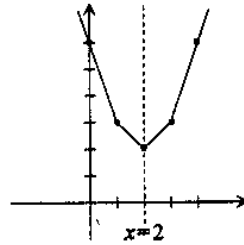
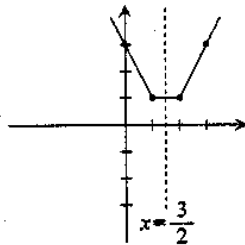
因這無限多個小圓的直徑和與大圓的直徑相同

故這無限多個小圓的周長和與大圓的周長相同

## 二、多重選擇題

4. 參考答案：(1)(3)(4)(5)

試題解析：先觀察  $f(x) = |x-1| + |x-2|$  與  $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$  之圖形



故  $f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_n|$  的折線圖形對稱時，  
對稱軸必為一平行於  $y$  軸之直線

且  $a_1, a_2, \dots, a_n$  按大小順序排列可形成一等差數列，可知  $\alpha=0$ ，  
 $\beta$  為  $a_1, a_2, \dots, a_n$  之中位數，亦為  $a_1, a_2, \dots, a_n$  之算術平均數

5. 參考答案：(2)(5)

$$\text{試題解析：} P(A_i) = \frac{C_i^1((5-1)+4)!}{(5+4)!} = \frac{5}{9}, i=1, 2, \dots, 9$$

$$P(B_j) = \frac{C_j^1(5+(4-1))!}{(5+4)!} = \frac{4}{9}, j=1, 2, \dots, 9$$

$$P(A_i \cap B_j) = \frac{C_i^1 C_j^1((5-1)+(4-1))!}{(5+4)!} = \frac{5}{18}, i \neq j$$

$$\text{故(1)} P(A_3) = P(A_2) = \frac{5}{9}$$

$$(2) P(B_4) = P(B_7) = \frac{4}{9}$$

$$(3) P(A_3 \cap B_4) = \frac{5}{18}$$

$$(4) P(\text{黑球先取完}) = P(\text{第9次必取到黃球}) = P(B_9) = \frac{4}{9}$$

$$(5) P(A_2 \cap B_6) = \frac{5}{18}$$

### 三、選填題

A. 參考答案：16 (⑥ 1 ⑦ 6)

試題解析：設四月份第一個星期三為  $x$  日，且有  $n$  個星期三

$$\text{因一星期有7日，故 } 80 = \frac{n(x \cdot 2 + (n-1) \cdot 7)}{2}$$

$$\Rightarrow n(2x + 7n - 7) = 160$$

$$\text{若 } n=4, \text{ 則 } x = \frac{19}{2} \text{ (不合)}$$

$$\text{故 } n=5, \text{ 得 } x=2 \Rightarrow \text{第3個星期三為 } 2 + (3-1) \times 7 = 16 \text{ 日}$$

B. 參考答案：18 (⑧ 1 ⑨ 8)

試題解析： $x^2 + y^2 + 2kx - 6y + 3k + 13 = 0$

$$\Rightarrow (x+k)^2 + (y-3)^2 = k^2 - 3k - 4 \text{ 為一圓}$$

↑

對  $x, y$  配方

又  $P(-2, 3)$  在圓外

$$\text{故 } \begin{cases} k^2 - 3k - 4 > 0 \\ (-2+k)^2 + (3-3)^2 > k^2 - 3k - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k+1)(k-4) > 0 \\ k < 8 \end{cases} \Rightarrow 4 < k < 8$$

因  $k$  為正整數，故  $k=5$  或  $6$  或  $7 \Rightarrow 5+6+7=18$

C. 參考答案：57.6 (⑩ 5 ⑪ 7 ⑫ 6)

試題解析：

分組	人數	組中點	平移 - 23	各組和
18~20	13	19	-4	$13 \times (-4) = -52$
20~22	24	21	-2	$24 \times (-2) = -48$
22~24	43	23	0	0
24~27	20	25.5	2.5	$20 \times 2.5 = 50$
				總和 = -50

故總平均為  $\frac{-50}{100} + 23 = 22.5$ ，則  $22.5 \times 1.6^2 = 57.6$

D. 參考答案：80 (13 8 14 0)

$$\text{試題解析：} \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_2B}} \Rightarrow \frac{h}{h+3} = \frac{2}{6} \Rightarrow h = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \overline{OA} = \frac{5}{2}, \overline{OB} = \frac{15}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 5$$

$$\widehat{AA'} = \text{上底的圓周長} = 4\pi$$

$$\widehat{BB'} = \text{下底的圓周長} = 12\pi$$

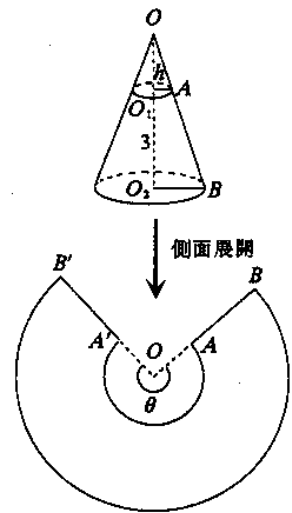
$$\text{因 } \widehat{AA'} = \overline{OA} \cdot \theta \Rightarrow 4\pi = \frac{5}{2} \cdot \theta$$

$$\text{故 } \theta = \frac{8}{5} \pi$$

$$\begin{aligned} \text{則側表面積為 } & \frac{1}{2} (\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2) \theta \\ & = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{15}{2} \right)^2 - \left( \frac{5}{2} \right)^2 \right) \times \frac{8}{5} \pi = 40\pi \end{aligned}$$

$$\text{上底與下底之面積和為 } 2^2 \cdot \pi + 6^2 \cdot \pi = 40\pi$$

故鋼板面積至少需  $80\pi$  平方公分



E. 參考答案：(2, 1, 9) (15 2 16 1 17 9)

試題解析：若  $x=1$ ，因  $1976+100 > 1999$ ，故不合

若  $x=3$ ，因  $1999 < 1976+300 < 2999$ ，故不合

同理  $x=4 \sim 9$  不合

$$\text{故 } x=2, \text{ 則 } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{若 } y=1, \text{ 因 } 2176+10 < 2199, \text{ 故成立, 即 } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{則 } z \text{ 必為 } 9, \text{ 即 } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 9 & 5 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

若  $y=2$ ，因  $2176+20 < 2200$ ，故不合

同理  $y=3 \sim 9$  不合

F. 參考答案：84 (18 8 19 4)

試題解析： $(x-0)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (y-0)$ ，頂點  $(0, 0)$ ，焦點  $(0, 2)$ ，準線  $y = -2$

令  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

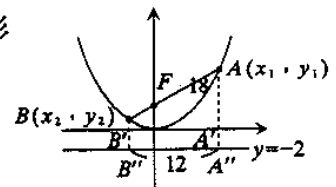
由右圖知  $\overline{AA''} = y_1 + 2, \overline{BB''} = y_2 + 2$  且  $AA'B'B$  為一梯形

由拋物線定義知  $\overline{AF} = \overline{AA''}, \overline{BF} = \overline{BB''}$

$$\Rightarrow \overline{AB} = y_1 + y_2 + 4$$

故梯形  $AA'B'B$  之面積為  $\frac{1}{2} \times (\overline{AA'} + \overline{BB'}) \times \overline{A'B'}$

$$= \frac{1}{2} \times (y_1 + y_2) \times \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \times (18 - 4) \times 12 = 84$$



G. 參考答案： $(\frac{-46}{13\sqrt{13}}, \frac{9}{13\sqrt{13}})$  (20 4 21 6 22 9)

試題解析：設  $\angle BOC = \theta \Rightarrow \angle AOB = 2\theta$

$$\text{則 } \cos 2\theta = -\frac{5}{13}, \sin 2\theta = \frac{12}{13}$$

$$\text{由半角公式 } \sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\theta}}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{因 } \overline{OB} \text{ 逆時針旋轉 } \theta \text{ 角至 } \overline{OC}, \text{ 故 } \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{46}{13\sqrt{13}} \\ \frac{9}{13\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

可得  $C$  之坐標為  $(\frac{-46}{13\sqrt{13}}, \frac{9}{13\sqrt{13}})$

第貳部分：

1. 參考答案：(1)  $(2\sqrt{3}-3)r$  (2)  $\frac{18\sqrt{3}+31}{22}\pi r^2$

試題解析：(1) 設圓  $C_2$  的半徑為  $r'$

則  $\triangle ABC$  為邊長  $2r'$  的正  $\triangle$

$$\text{故 } r = r' + \overline{AC_1} = r' + \frac{2}{3}\overline{AD} \dots \dots \text{至此得 2 分}$$

↑  $C_1$  為  $\triangle ABC$  的重心

$$= r' + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r'$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}r' \Rightarrow r' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}r = (2\sqrt{3}-3)r \dots \dots \text{至此再得 2 分}$$

(2) 圓  $C_1, C_2, C_3, \dots$  之面積成一無窮等比數列

公比為  $3 \times (2\sqrt{3}-3)^2 = 9(7-4\sqrt{3}) \dots \dots$  出現此值得 2 分

故這無限多個圓的面積總和為

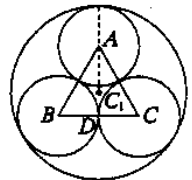
$$\pi r^2 + 3\pi(21-12\sqrt{3})r^2 + 9\pi(21-12\sqrt{3})^2r^2 + \dots$$

$$= \frac{\pi r^2}{1-9(7-4\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\pi r^2}{36\sqrt{3}-62} \dots \dots \text{至此再得 3 分}$$

$$= \frac{\pi r^2}{2(18\sqrt{3})-31}$$

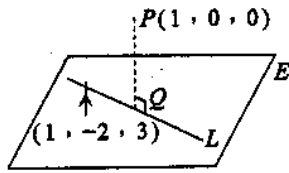
$$= \frac{18\sqrt{3}+31}{22}\pi r^2 \dots \dots \text{至此再得 2 分}$$





2. 參考答案：(1)  $\overline{PQ} \perp E$       (2)  $6x - 4y - 9z + 13 = 0$

試題解析：



令  $Q(1+t, -2-3t, 3+2t)$  且  $L$  之方向向量  $\overline{u_L} = (1, -3, 2)$

則  $\overline{PQ} = (t, -2-3t, 3+2t)$

因  $\overline{PQ} \perp L$ , 故  $\overline{PQ} \cdot \overline{u_L} = 0$

$$\Rightarrow t + 6 + 9t + 6 + 4t = 0 \Rightarrow t = -\frac{6}{7}$$

$\Rightarrow Q\left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$ ……至此得 3 分

因  $\overline{PQ} \perp E$ , 故  $\overline{PQ} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$  可為  $E$  之法向量

$$\text{故 } -\frac{6}{7}(x-1) + \frac{4}{7}(y+2) + \frac{9}{7}(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 4y - 9z + 13 = 0 \dots\dots \text{至此再得 3 分}$$