北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學甲試題

第壹部分：（77%）

一、單一選擇題（12%）

說明：第 1 至 2 題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 2 分，未答者，不給分亦不扣分。

1. 設 $0\le\theta<2\pi$ 且 $k>0$，若 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+3\sqrt{3} \\ -3+3\sqrt{3} \end{bmatrix}$，則 θ 角在下列那一個範圍內？

   (1) $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}\le\theta<\pi$　(3) $\pi\le\theta<\dfrac{3\pi}{2}$　(4) $\dfrac{3\pi}{2}\le\theta<2\pi$

2. 天上的星星有的較亮，有的較暗，天文學以「星等」區分之，即：選擇某一特定的星光強度 F_0 爲標準，對於發出星光強度爲 F 的星體，定義其「星等」爲 $m=-2.5\log\dfrac{F}{F_0}$，並稱該星體爲「m 等星」。已知天狼星爲 -1.4 等星，北極星爲 2 等星，則天狼星的星光強度大約是北極星的幾倍？

   (1) 3　(2) 13　(3) 23　(4) 33

常用對數表

$\log_{10}N$ 或 $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11

二、多重選擇題（40%）

說明：第 3 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個，倒扣 2 分，完全答對得 8 分，未答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。

3. 關於二元二次方程式 Γ：$x^2+xy+y^2=6$ 的敘述，下列那些是正確的？

(1) Γ 的圖形是雙曲線

(2) $F(0，2\sqrt{2})$ 是 Γ 的一個焦點

(3) 直線 $x+y=0$ 爲 Γ 的一條對稱軸

(4) 若 $P(a，b)$ 爲 Γ 上的一點，則 a^2-b^2 的最大值爲 $4\sqrt{3}$

4. 有 A、B、C、D、E、F、G 七人排成一列，已知 A、B 之間恰有一人，C、D 之間至少有二人，且 A、B 皆不得排在 C、D 之間，則下列敘述那些是正確的？

(1) C、D 中至少有一人排在首位或末位

(2) A、B 中至少有一人排在首位或末位

(3) E 可以排在第四位

(4) F 不能排在第四位

5. 已知空間中三點 $A(2，2，1)$、$B(1，3，-1)$、$C(1，1，-1)$，若在空間中與 A、B、C 三點等距離的所有點所形成圖形之方程式爲 Γ，則下列有那些是正確的？

(1) Γ：$x-y+2z+1=0$

(2) Γ：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$，$t\in R$

(3) Γ 中與原點最接近之點爲 $(\frac{1}{5}，2，\frac{2}{5})$

(4) Γ 中與原點最近之距離爲 $\sqrt{\frac{21}{5}}$

6. 坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2=1$ 經由伸縮變換 M 得到的新方程式爲 $C': \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，若不等式組 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 1\\ x\ge 1\end{cases}$ 所表示的區域面積爲 A，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y\ge 1\end{cases}$ 所表示的區域面積爲 B，則以下那些選項是正確的？

(1)伸縮變換 M 所對應的矩陣爲 $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(2)將直線 $x=\dfrac{1}{2}$ 以原點爲中心旋轉 $30°$ 後，所得的新方程式爲 $x\cos 30°+y\sin 30°=\dfrac{1}{2}$

(3) $A=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $A>B$

7. 下表爲九十二學年度學科能力測驗國文、數學兩科各級分人數累計表

分	國文				數學			
	人數	百分比	累計人數	累計百分比	人數	百分比	累計人數	累計百分比
15	3461	2.14	3461	2.14	2194	1.36	2194	1.36
14	7653	4.73	11114	6.86	2830	1.75	5024	3.11
13	16632	10.27	27746	17.13	2456	1.52	7480	4.62
12	24446	15.09	52192	32.22	4728	2.92	12208	7.55
11	25385	15.67	77577	47.90	6554	4.05	18762	11.60
10	26575	16.41	104152	64.31	5745	3.55	24507	15.15
9	19708	12.17	123860	76.47	10427	6.45	34934	21.60
8	15505	9.57	139365	86.05	8505	5.26	43439	26.85
7	10100	6.24	149465	92.28	15177	9.38	58616	36.23
6	5838	3.60	155303	95.89	17916	11.08	76532	47.31
5	3797	2.34	159100	98.23	13713	8.48	90245	55.79
4	1867	1.15	160967	99.39	23292	14.40	113537	70.19
3	779	0.48	161746	99.87	16810	10.39	130347	80.58
2	195	0.12	161941	99.99	21934	13.56	152281	94.14
1	19	0.01	161960	100.00	7598	4.70	159879	98.83
0	3	0.00	161963	100.00	1889	1.17	161768	100.00

請觀察上表，判斷下列那些選項是正確的？

(1)數學成績的四分位差小於國文成績的四分位差

(2)若三年一班甲同學的國文成績爲 11 級分，數學成績爲 8 級分，則他的數學成績在所有考生中的排名比他國文成績在所有考生中的排名還前面

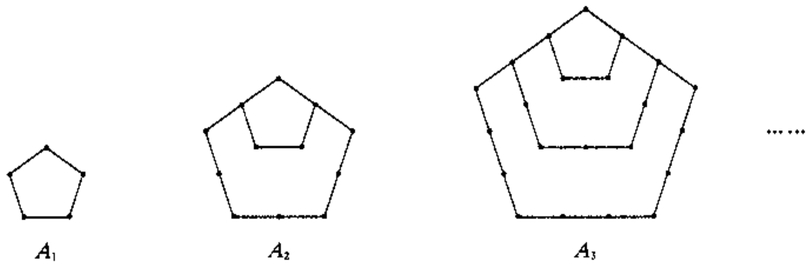
(3)國文成績的標準差小於數學成績的標準差

(4)設某大學數學系申請入學的資格爲(國文成績)+(數學成績) ≥ 28 級分，則最多有 3461 人符合此標準

三、選填題（25%）

說明：A、B、C、D、E五題，請在答案卡的「解答欄」之列號（8-23）中標示答案。每一題完全答對得5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. A_1，A_2，A_3，…爲一群幾何圖形，其中A_n包含n個正五邊形，邊長依次爲 1，2，…，n 單位長，重疊放置如下圖，若在其任一邊上，每間隔一單位處取一點（含頂點），則A_1上有 5 個點，A_2上有 12 個點，A_3上有 22 個點，請問A_{20}上有＿⑧⑨⑩＿個點。



B. 令$i=\sqrt{-1}$，設$f(x)$爲實係數多項式，若$f(1+i)=1-i$，而以x^2-2x+2除$f(x)$的餘式爲$ax+b$，其中a，b皆實數，則$a=$＿⑪⑫＿，$b=$＿⑬＿。

C. 美國NBA職籃聯賽之總冠軍賽爲七戰四勝制，且每次比賽均無和局（都能分出勝負），已知目前賽完 4 場中，公牛隊以二勝二敗暫時與尼克隊打成平手，根據資料分析，公牛隊每場比賽勝尼克隊的機率爲$\frac{2}{3}$，若每場比賽皆爲獨立事件，則尼克隊擊敗公牛隊的機率爲$\frac{⑭}{⑮⑯}$。

D. 有A、B、C、D、…等 10 人圍坐一個圓桌，A、B之間至少間隔 2 人，B、C之間至少間隔 2 人，C、A之間亦至少間隔 2 人，問如此入座共有＿⑰⑱⑲⑳㉑＿種方法。

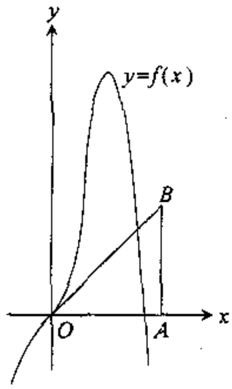
E. 已知三次函數$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$f'(x)$爲其導函數，若$f(1)=f'(1)=2$，則$y=f(x)$的圖形在$x=1$處之切線方程式爲＿$y=$㉒$x+$㉓＿。

第貳部分：（23%）

說明：第 1 及第 2 題為計算題，每題各有(1)、(2)兩小題，每小題的配分標於題末，請在非選擇題答案卷之「作答區」作答，須寫出演算過程，並於「題號欄」註明題號。

1. 設一三角形的最短邊與最長邊分別爲x，$x+2$，其所對之內角分別爲θ，2θ，
 (1)試以x表示$\cos\theta$。（5 分）
 (2)若此三角形之三邊長成等差數列，求x的值。（6 分）

2. 已知坐標平面上三點$O(0，0)$、$A(5，0)$、$B(5，5)$，設$f(x)=-3x^4+12x^3$爲四次多項函數，P爲$y=f(x)$圖形上一點，則
 (1)兩三角形$\triangle OAP$與$\triangle OAB$之重疊部分面積的最大值爲何？（6 分）
 (2)承(1)，此時P點坐標爲何？（6 分）



北區公立高中 **91** 學年度第二學期指定考科第三次模擬考數學甲答案

第壹部分：

一、單一選擇題

1. 參考答案：(4)

試題解析：令 $A(1,1)$、$B(3+3\sqrt{3},-3+3\sqrt{3})$

則原式即表示「以原點爲中心將 A 點旋轉 θ 角後，再伸縮 k 倍，恰得到 B 點」

而 $\overline{OA}=\sqrt{2}$、$\overline{OB}=6\sqrt{2}$

故 $k=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=6$，代入原式計算得

$$\begin{cases}\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \cos\theta+\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

又 $0\le\theta<2\pi$，所以 $\theta=\dfrac{11\pi}{6}$

2. 參考答案：(3)

試題解析：設天狼星的星光強度爲 F_1，北極星的星光強度爲 F_2，由星等之定義知

$$\begin{cases}-1.4=-2.5\log\dfrac{F_1}{F_0}\\ 2=-2.5\log\dfrac{F_2}{F_0}\end{cases}$$，兩式相減得 $-3.4=-2.5\log\dfrac{F_1}{F_2}$

即 $\log\dfrac{F_1}{F_2}=1.36=1+0.3600\doteqdot 1+\log 2.291$（查表）

所以 $\dfrac{F_1}{F_2}\doteqdot 2.291\times 10\doteqdot 23$

二、多重選擇題

3. 參考答案：(3)(4)

試題解析：(1)令 $\cot 2\theta=\dfrac{1-1}{1}=0$，取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，將原坐標軸旋轉 $\dfrac{\pi}{4}$ 後，可消去 xy 項

得新方程式爲 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{12}=1$，故 Γ 的圖形是橢圓

(2)兩焦點之新坐標爲$(0, 2\sqrt{2})$、$(0, -2\sqrt{2})$，原坐標爲$(-2, 2)$、$(2, -2)$

(3)兩對稱軸之新方程式爲$y'=0$、$x'=0$，原方程式爲$x-y=0$、$x+y=0$

(4)令點$P(a, b)\in\Gamma$經原坐標軸旋轉$\frac{\pi}{4}$後的新坐標爲$P(a', b')$，則

$$\begin{cases} a=\frac{\sqrt{2}}{2}a'-\frac{\sqrt{2}}{2}b' \\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}a'+\frac{\sqrt{2}}{2}b' \end{cases}，即 a^2-b^2=-2a'b'$$

另一方面，由算幾不等式知$\dfrac{\frac{a'^2}{4}+\frac{b'^2}{12}}{2}\geq\sqrt{\frac{a'^2}{4}\cdot\frac{b'^2}{12}}$

即$\frac{1}{2}\geq\frac{|a'b'|}{4\sqrt{3}}\Rightarrow |a'b'|\leq 2\sqrt{3}$，故有$|a^2-b^2|=2|a'b'|\leq 4\sqrt{3}$

即$-4\sqrt{3}\leq a^2-b^2\leq 4\sqrt{3}$。因此，當$\frac{a'^2}{4}=\frac{b'^2}{12}=\frac{1}{2}$時，等號成立

可取$a'=\sqrt{2}$、$b'=-\sqrt{6}$，得$a^2-b^2=-2a'b'$之最大值爲$4\sqrt{3}$

4. 參考答案：(1)(2)(4)

試題解析：由題意可知，強迫C、D之間恰有二人，故僅有兩類排法

第一類：A□BC□□D

第二類：C□□DA□B

其中A、B可對調且C、D亦可對調，「□」表示E、F、G三人可排入的位置

故(1)(2)(4)均正確，但(3)錯誤，因爲第四位必爲A、B、C、D四人其中之一

5. 參考答案：(2)(3)(4)

試題解析：(1)$\overline{AB}$的垂直平分面爲$x-y+2z=-1$，$\overline{AC}$的垂直平分面爲$x+y+2z=3$

由題意知Γ爲此兩平面之交線，即$\Gamma:\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

(2)令$z=t$，得Γ之參數式爲$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$，$t\in R$

(3)令$P(1-2t, 2, t)\in\Gamma$

則$\overline{OP}=\sqrt{(1-2t)^2+2^2+t^2}=\sqrt{5(t-\frac{2}{5})^2+\frac{21}{5}}\geq\sqrt{\frac{21}{5}}$

此即，當$t=\frac{2}{5}$時，$\overline{OP}$有最小值，且$P(\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5})$

(4)由上述知，最小值爲$\sqrt{\frac{21}{5}}$

6. 參考答案：(1)(2)(3)

試題解析：(1)將 $C：x^2+y^2=1$ 變換爲 $C'：\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 的對應爲 $(x，y)\to(2x，y)$

其矩陣表示爲 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(2)若點 $(x，y)$ 以原點爲中心旋轉 $30°$ 得到點 $(X，Y)$

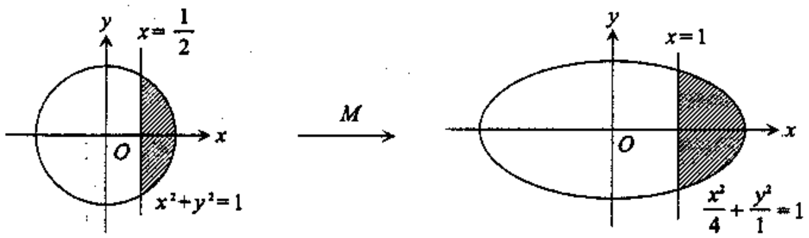
則 $\begin{cases}x=X\cos 30°+Y\sin 30°\\y=-X\sin 30°+Y\cos 30°\end{cases}$，代入方程式 $x=\dfrac{1}{2}$ 中

得 $X\cos 30°+Y\sin 30°=\dfrac{1}{2}$

故新方程式爲 $x\cos 30°+y\sin 30°=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{3}x+y=1$

(3)考慮不等式組 $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 所表示的區域面積爲 a，而其經由伸縮變換 M 所得

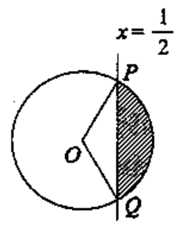
$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 1\\x\ge 1\end{cases}$ 的區域面積爲 A，則根據水平伸縮 $x\to 2x$ 之倍率，可得 $A=2a$



而 $a=$(扇形 OPQ 面積)$-$($\triangle OPQ$ 面積)

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，故 $A=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(4)承(2)(3)，不等式組 $\Gamma_1：\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 以原點爲中心旋轉 $30°$ 可得

$\Gamma_2：\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\\sqrt{3}x+y\ge 1\end{cases}$，因直線 $x=\dfrac{1}{2}$ 與 $\sqrt{3}x+y=1$ 到原點的距離相等

故兩不等式組所表示的區域面積相等，即 Γ_2 之面積亦爲 a

而 Γ_2 再經由伸縮變換 $(x，y)\to(2x，y)$ 可得 $\Gamma_3：\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}\le 1\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y\ge 1\end{cases}$

根據伸縮之倍率得知 Γ_3 所表示的區域面積爲 Γ_2 的 2 倍

即 $B=2a$，因此 $A=B$

7. 參考答案：(2)(3)

試題解析：(1)設四分位差為$Q.D.=Q_3-Q_1$，由累計百分比知，數學的四分位差為$8-3=5$級分，國文的四分位差為$12-9=3$級分，故數學之四分位差較大

(2)由累計人數知，52192＜國文成績排名≤77577

34934＜數學成績排名≤43439

故數學成績排名較前

(3)由累計百分比知，所有考生的國文成績約前75%集中在9至15級分之間

而數學成績的前75%則相對較分散地落在3至15級分之間

由此可推得國文成績的標準差應較小

(4)細觀表中「人數」一欄，若

「數學成績為15級分的2194位同學，其國文成績都恰為13級分；

數學成績為14級分的2830位同學，其國文成績都恰為14級分；

數學成績為13級分的2456位同學，其國文成績都恰為15級分。」

則共有7480位（此即數學成績達13級分的累計人數）同學的成績符合該入學申請的資格，同時，欲使(國文成績)+(數學成績)≥28級分，必須兩成績均大於或等於13級分，故7480即符合該資格之最多人數。

三、選擇題

A. 參考答案：651（⑧6　⑨5　⑩1）

試題解析：令A_0表示一個點，A_n上有a_n個點，則

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_n=a_{n-1}+(3n+1)\text{，}n\in N \end{cases}$$

其中$a_n=a_{n-1}+(3n+1)$表示：對任一個自然數n，A_n比A_{n-1}多3個邊

而每邊有$n+1$個點，故A_n比A_{n-1}多了$3(n+1)-2=3n+1$個點。因此

$$\begin{aligned} a_0&=1 \\ a_1&=a_0+(3\cdot 1+1) \\ a_2&=a_1+(3\cdot 2+1) \\ &\vdots \\ a_{n-1}&=a_{n-2}+[3\cdot(n-1)+1] \\ a_n&=a_{n-1}+(3n+1) \end{aligned}$$

全部相加得$a_n=3[1+2+\cdots+(n-1)+n]+1\cdot(n+1)=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

所求為$a_{20}=\dfrac{21\times 62}{2}=651$

B. 參考答案：$\underline{-1}$（⑪ $\underline{-}$ ⑫ $\underline{1}$），$\underline{2}$（⑬ $\underline{2}$）

試題解析：由除法原理，存在 $q(x)$ 使得 $f(x)=(x^2-2x+2)\cdot q(x)+(ax+b)$

由題意，令 $x=1+i$ 代入得 $f(1+i)=0\cdot q(1+i)+a(1+i)+b=1-i$

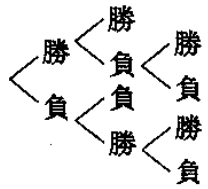
整理爲 $(a+b-1)+(a+1)i=0$，又因 a，b 皆實數

故 $\begin{cases} a+b-1=0 \\ a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

C. 參考答案：$\underline{\dfrac{7}{27}}$（⑭ $\underline{7}$ ⑮ $\underline{2}$ ⑯ $\underline{7}$）

試題解析：將尼克隊獲勝之三種情況列如下表

情況	第 5 場	第 6 場	第 7 場	機　　率
一	勝	勝		$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
二	勝	負	勝	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$
三	負	勝	勝	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$



尼克隊獲勝機率爲 $\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$

D. 參考答案：$\underline{30240}$（⑰ $\underline{3}$ ⑱ $\underline{0}$ ⑲ $\underline{2}$ ⑳ $\underline{4}$ ㉑ $\underline{0}$）

試題解析：按以下步驟解之

(1) A、B、C 先入座爲環狀排列有 $\frac{3!}{3}=2$ 種方法

(2)由題意知，A、B 之間，B、C 之間，C、A 之間恰有一者爲 3 人，餘兩者爲 2 人，此有 3 種情形

(3)餘 7 人入座，視爲直線排列，方法數爲 7！

按乘法原理共有 $2\times3\times7!=30240$ 種方法

E. 參考答案：$\underline{y=2x}$（㉒ $\underline{2}$ ㉓ $\underline{0}$）

試題解析：由導數之幾何意義，所求切線斜率即 $f'(1)=2$；又切點爲 $(1, f(1))=(1, 2)$

由點斜式得切線方程式爲 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$

第貳部分：

1. 參考答案：(1) $\underline{\cos\theta=\dfrac{x+2}{2x}}$　(2) $\underline{x=4}$

試題解析：(1)由正弦定理，$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+2}{\sin2\theta} \Rightarrow \dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+2}{2\sin\theta\cos\theta}$，化簡得 $\cos\theta=\dfrac{x+2}{2x}$

(2)依題意，三邊爲 x，$x+1$，$x+2$

由餘弦定理，$\cos\theta=\dfrac{(x+1)^2+(x+2)^2-x^2}{2(x+1)(x+2)}=\dfrac{x+5}{2(x+2)}$

由(1)有 $\dfrac{x+5}{2(x+2)}=\dfrac{x+2}{2x}$，即 $x=4$

2. 參考答案：(1) $\underline{\dfrac{5000}{409}}$　(2) $\underline{P\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{2000}{27}\right)}$

試題解析：設直線 $\overleftrightarrow{PA}$ 的斜率爲 m，則當 $|m|$ 愈大且 P 點在 x 軸上方時，$\triangle OAP$ 與 $\triangle OAB$ 的重疊部分就愈大，而當 $|m|$ 有最大值時，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $y=f(x)$ 的圖形必定相切。作法如下

設 $P(a,f(a))$，則過 P 點和 $y=f(x)$ 圖形相切之切線方程式爲

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$，既然希望 $\overleftrightarrow{PA}$ 是切線

故將 $A(5,0)$ 代入得 $0-f(a)=f'(a)(5-a)$

即 $-(-3a^4+12a^3)=(-12a^3+36a^2)(5-a)$

整理爲 $a^2(a-6)(3a-10)=0$，即 $a=0$，$a=6$ 或 $a=\dfrac{10}{3}$

當 $a=0$，$\overleftrightarrow{PA}$ 爲過 $O(0,0)$ 的水平切線，不合

當 $a=6$，$P(6,-1296)$ 在 x 軸下方，$\triangle OAP$ 與 $\triangle OAB$ 無重疊之部分，不合

當 $a=\dfrac{10}{3}$，$P\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{2000}{27}\right)$ 爲所求

此時直線 $\overleftrightarrow{PA}$：$\dfrac{y}{x-5}=\dfrac{\frac{2000}{27}}{\frac{10}{3}-5}$ 和直線 $\overleftrightarrow{OB}$：$y=x$ 的交點爲 $D\left(\dfrac{2000}{409},\dfrac{2000}{409}\right)$

而 $\triangle OAP$ 與 $\triangle OAB$ 的重疊部分 $\triangle OAD$ 有最大面積

其面積爲 $\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{2000}{409}=\dfrac{5000}{409}$