台北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第二次模擬考數學乙試題

第壹部分：（67%）

一、單一選擇題（18%）

說明：第 1 至 3 題為單一選擇題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 1/4 題分。未答者，不給分亦不扣分。

1. 設相異兩點 A，B 都在直線 L_1：$\begin{cases}3x-y+z-7=0\\2x+y-3z+14=0\end{cases}$ 上，也都在直線 L_2：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$ 上，m，n，b，$c\in R$，則 $m+n+b+c$ 之值為？

(1) 22

(2) 23

(3) 24

(4) 25

(5) 26

2. 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過坐標 $(1，6)$ 之點，又知其頂點為 $(-1，2)$，則

(1) $a<b<c$

(2) $b<c<a$

(3) $c<a<b$

(4) $a=b=c$

(5) $a>b>c$

3. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=14$，$\overline{CA}=15$，$\overline{BC}$ 邊上的高為 $\overline{AH}$，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x，y)=$？

(1) $(\frac{4}{15}，\frac{11}{15})$

(2) $(\frac{11}{15}，\frac{4}{15})$

(3) $(\frac{5}{14}，\frac{9}{14})$

(4) $(\frac{9}{14}，\frac{5}{14})$

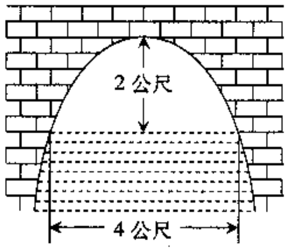
(5) $(\frac{6}{13}，\frac{7}{13})$

二、選填題（49%）

說明：A，B，C，D，E，F，G 各題為選填題，作答於答案卡之「解答欄」所標示的列號（4-16）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$，則$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ -a^3 & 1 & -a \\ a^2 & a^3 & 1 \end{vmatrix}$之值爲__④__。

B. 如右圖是呈拋物線的一座拱橋，假設原來拱頂離水面 2 公尺，水面寬 4 公尺，問水面上升 1 公尺後，水面寬是__$⑤\sqrt{⑥}$__公尺。



C. 設x，y，z爲自然數，且$x+y+3z=15$，則

$\log_3 x+2\log_9 y+9\log_{27} z$之最大值爲__⑦__。（$\log 2=0.3010$）

D. 設一元三次方程式$x^3-17x^2+32x+a=0$有兩個複數根$b+i$，$1+ci$，其中a，b，c都是不等於 0 之實數，則此方程式的另一根爲__⑧⑨__。

E. 有一個無窮等比數列$1，\dfrac{5}{2}，(\dfrac{5}{2})^2，(\dfrac{5}{2})^3，\cdots，(\dfrac{5}{2})^{n-1}，\cdots$（$n\in N$），則此數列中整數部分是十二位數的有__⑩__項。

F. 有 5 張卡片之正、反兩面分別寫著 0 與 1，2 與 3，4 與 5，6 與 7，8 與 9，任取其中 3 張排成三位數，可排成__⑪⑫⑬__個不同的三位數。

G. 幸倫和昭儀玩「黑白配，男生女生配」的遊戲，由幸倫先以手比四個方向「上，下，左，右」之一，昭儀以頭轉向「上，下，左，右」四個方向之一，二人同時出招（互不影響），如果方向相同時，則幸倫獲勝，反之，則改由昭儀手比，幸倫以頭轉向，方向相同時，則昭儀獲勝，否則換手，…直至分出勝負爲止，則幸倫於第二次獲勝的機率爲

$\dfrac{⑭}{⑮⑯}$。

第貳部分：（33%）

說明：一、二、三各題作答於「答案卷」，並必須於題號欄標明題號，且應寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、 圓內接四邊形$ABCD$，若$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=2$，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，則

(1) $\cos A+\sin B+\cos C-\sin D=$？（3分）

(2) $\overline{AD}=$？（4分）

(3) 四邊形$ABCD$之面積＝？（4分）

二、 (1)試求不等式$\begin{cases}(x+y-1)(2x-y+2)\le 0\\ x-y\le 0\\ y\le 2\end{cases}$ 所圍成圖形之面積爲何？（6分）

(2)若直線$y=mx-3$與(1)圖形相交，則實數m之範圍爲何？（5分）

三、 設$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$，則

(1) $A^2=aB$（$a\in R$），求$a=$？（2分）

(2) $A^3=bI_2$（$b\in R$），求$b=$？（3分）

(3) $A+A^4+A^7+\cdots+A^{3n+1}=cA$（$n\in N$，$c\in R$），求$c=$？（6分）

台北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第二次模擬考數學乙答案

第壹部分：

一、單一選擇題

1. 參考答案：(3)

試題解析：$\because$ 相異兩點恰可決定一直線　$\therefore$ $L_1=L_2$

點$(1,b,c)$在L_2上，所以亦在L_1上，代入L_1

$$\begin{cases}3-b+c-7=0\\2+b-3c+14=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\c=6\end{cases}$$

L_1之方向比爲 $\begin{vmatrix}-1&1\\1&-3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&3\\-3&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&-1\\2&1\end{vmatrix}=2:11:5$

L_2之方向比爲$2:m:n$

$\therefore$ $2:m:n=2:11:5\Rightarrow m=11$，$n=5$

故$m+n+b+c=11+5+2+6=24$

選(3)

2. 參考答案：(1)

試題解析：設$f(x)=a(x+1)^2+2$

$f(1)=4a+2=6$　$\therefore$ $a=1$

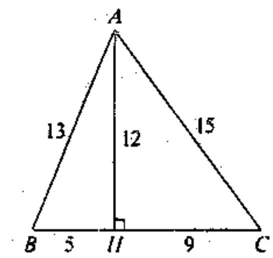
$f(x)=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$

$\therefore$ $a=1$，$b=2$，$c=3$，故$a<b<c$

選(1)

3. 參考答案：(4)

試題解析：$s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$



$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{21\times7\times6\times8}=84$

$\frac{1}{2}\times14\times\overline{AH}=84\Rightarrow\overline{AH}=12$

$\therefore$ $\overline{BH}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，$\overline{CH}=14-5=9$

故$\overrightarrow{AH}=\frac{9}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{14}\overrightarrow{AC}$　$\therefore$ $(x,y)=(\frac{9}{14},\frac{5}{14})$

選(4)

二、選填題

A. 參考答案：0（④ 0）

試題解析：$a=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i=\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}$

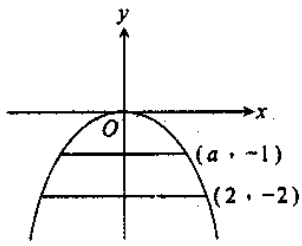
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ -a^3 & 1 & -a \\ a^2 & a^3 & 1 \end{vmatrix}=1-a^8-a^4-a^4+a^4+a^4=1-a^8$$

$$=1-(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})^8$$

$$=1-[\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)]=1-1=0$$

B. 參考答案：$2\sqrt{2}$（⑤ 2　⑥ 2）

試題解析：建立坐標如右：



設拋物線爲 $x^2=4cy$

$(2，-2)$ 代入上式 $4=4c(-2)$

$\therefore\ c=\frac{-1}{2}\ \Rightarrow\ x^2=-2y$

水面上升 1 公尺時，設此點爲 $(a，-1)$

代入 $x^2=-2y$ 得 $a^2=2$　$\therefore\ a=\pm\sqrt{2}$

故水面寬爲 $|2a|=2\sqrt{2}$

C. 參考答案：5（⑦ 5）

試題解析：$\frac{x+y+z+z+z}{5}\geq\sqrt[5]{xyzzz}$（算幾不等式）

$\Rightarrow\ 3\geq\sqrt[5]{xyz^3}\ \Rightarrow\ xyz^3\leq 3^5$

$\log_3 x+2\log_9 y+9\log_{27} z=\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z^3$

$=\log_3 xyz^3\leq\log_3 3^5=5$

$\therefore$ 最大值爲 5

D. 參考答案：15（⑧ 1　⑨ 5）

試題解析：實係數方程式，若有虛根則必成對出現且互爲共軛虛根

$\therefore\ a+i$ 與 $1+bi$ 爲共軛虛數

$\Rightarrow\ a=1，b=-1$

又三根和爲 17

$\therefore$ 第三根爲 $17-(1+i)-(1-i)=15$

E. 參考答案：$\underline{3}$（⑩ $\underline{3}$）

試題解析：設 $(\frac{5}{2})^x$ 之整數部分爲十二位數（$x\in N$）

$$10^{11}\leq \log(\frac{5}{2})^x<10^{12}\Rightarrow 11\leq x(\log 5-\log 2)<12$$

$$\Rightarrow \frac{11}{0.3980}\leq x<\frac{12}{0.3980}\Rightarrow 27.6\cdots\leq x<30.1\cdots$$

又 $x\in N$ $\therefore$ $x=28$ 或 29 或 30 共有 3 個

F. 參考答案：$\underline{432}$（⑪ $\underline{4}$ ⑫ $\underline{3}$ ⑬ $\underline{2}$）

試題解析：百位數字爲 1，$P^4_2\times 2\times 2=48$

百位數字不爲 1，$C^4_1\times P^4_2\times 2\times 2\times 2=384$

$48+384=432$

G. 參考答案：$\underline{\frac{9}{64}}$（⑭ $\underline{9}$ ⑮ $\underline{6}$ ⑯ $\underline{4}$）

試題解析：幸倫和昭儀第一次沒有獲勝，幸倫第二次獲勝

$$(1-\frac{4}{4\times 4})(1-\frac{4}{4\times 4})(\frac{4}{4\times 4})=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

第貳部分：

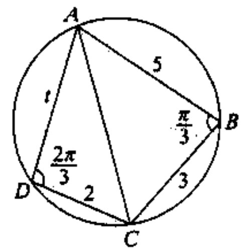
一、參考答案：(1) $\underline{0}$ (2) $\underline{3}$ (3) $\underline{\frac{21\sqrt{3}}{4}}$

試題解析：(1) $\because$ $ABCD$ 爲圓內接四邊形

$\therefore$ $\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$

$\cos A=-\cos C$，$\sin B=\sin D$

$\therefore$ $\cos A+\sin B+\cos C-\sin D=0$……（3 分）



(2) 令 $\overline{AD}=t$

$$\overline{AC}^2=t^2+2^2-2\cdot t\cdot 2\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\frac{\pi}{3}\text{（餘弦定理）}$$

$\Rightarrow$ $t^2+4+2t=34-15$ $\Rightarrow$ $t^2+2t-15=0$

$\Rightarrow$ $(t+5)(t-3)=0$ $\Rightarrow$ $t=3$ 或 $t=-5$（不合）

$\therefore$ $\overline{AD}=3$……（4 分）

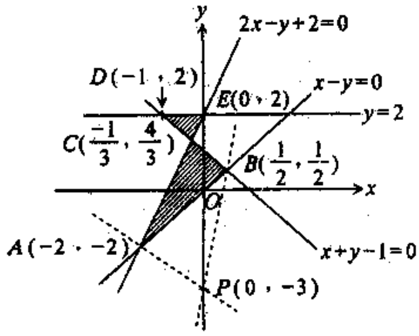
(3) 四邊形 $ABCD=\triangle ACD+\triangle ABC$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{21\sqrt{3}}{4}\text{……（4 分）}$$

二、參考答案：(1) $\underline{\dfrac{29}{12}}$　(2) $\underline{m\geq 7 \text{ 或 } m\leq \dfrac{-1}{2}}$

試題解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(\dfrac{5}{3},\dfrac{10}{3})$



$\triangle CDE+\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{2}\times 1\times(2-\dfrac{4}{3})+\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\dfrac{5}{2} & \dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{10}{3}\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{25}{12}=\dfrac{29}{12}$

(2) $y=mx-3$ 表通過 $P(0,-3)$

而斜率爲 m 之直線

$m_{\overline{PB}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+3}{\dfrac{1}{2}-0}=7$，$m_{\overline{PA}}=\dfrac{-2+3}{-2-0}=\dfrac{-1}{2}$

故 $m\geq 7$ 或 $m\leq\dfrac{-1}{2}$

三、參考答案：(1) $\underline{-2}$　(2) $\underline{-8}$　(3) $\underline{\dfrac{1-(-8)^{n+1}}{9}}$

試題解析：(1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=aB$

$\therefore\ a=-2$……（2 分）

(2) $A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}=-8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$=bI_2$

$\therefore\ b=-8$……（3 分）

(3) $A+A^4+A^7+\cdots+A^{3n+1}$

$=A+A^3A+(A^3)^2\cdot A+\cdots+(A^3)^n\cdot A$

$=AI_2+(-8)I_2A+(-8)^2I_2A+\cdots+(-8)^nI_2A$

$=A\times\dfrac{1-(-8)^{n+1}}{1-(-8)}=\dfrac{1-(-8)^{n+1}}{9}A=cA$

$\therefore\ c=\dfrac{1-(-8)^{n+1}}{9}$……（6 分）