台北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第二次模擬考數學甲試題

第壹部分：（72%）

一、單一選擇題（18%）

說明：第 1 至 3 題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，未答者，不給分亦不扣分。

1. z 爲複數且 $z+\frac{1}{z}=1$，求 $z^{99}+\frac{1}{z^{99}}=$？

(1) -2

(2) -1

(3) 0

(4) 1

(5) 2

2. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$，$E$ 爲 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 之交點，求 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 之面積比？

(1) 3：2

(2) 2：3

(3) 1：4

(4) 4：1

(5) 5：2

3. 將橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，以其右焦點爲旋轉中心，依順時針方向轉 90° 後，所得的橢圓方程式爲何？

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

(2) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

(3) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

(4) $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$

(5) $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

二、多重選擇題（24%）

說明：第4～6題，每題各有5個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1.6分；每答錯一個，倒扣1.6分，完全答對得8分，未答者，不給分亦不扣分。

4. 聯立方程式 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=-10 \\ xyz=-24 \end{cases}$，請從下列選項中選出可為$x$，$y$，$z$解之選項？

(1) 4

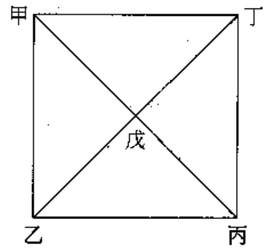
(2) 3

(3) 2

(4) -2

(5) -3

5. 某人因生意需要，經常於甲、乙、丙、丁、戊五地之間來回（如下圖），若今天在甲地，則明天可能在相鄰的乙地、丁地或戊地。已知此人從一地到其相鄰的三地（或四地）的機率相等，若今天此人在甲地，則三天後此人在五地的機率，下列選項何者正確？



(1)在甲地的機率為$\frac{1}{9}$

(2)在乙地的機率為$\frac{1}{9}$

(3)在丙地的機率為$\frac{7}{27}$

(4)在丁地的機率為$\frac{7}{27}$

(5)在戊地的機率為$\frac{7}{27}$

6. 設拋物線Γ：$y=x^2-x+a$（$a\in R$，$a\geq 0$），$A(1，a)$為其上一點，過A之切線、法線、y軸三線所圍成之三角形面積為S，請選出正確選項？

(1)切線斜率為1

(2)法線斜率為1

(3)S恆為1

(4)$S\geq 2$

(5)$S=2+a$

三、選填題（30%）

說明：A、B、C、D、E、F 六題，請在答案卡的「解答欄」之列號（7-20）中標示答案。每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 函數 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}}$ 的定義域是 $\underline{\{x \mid x\in R，⑦<x<⑧\}}$。

B. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{65}{264}$，求 $n=$ ⑨⑩。

C. 設 $x，y\in R$，且 $x\neq0，y\neq0$，若 $\sec^2\theta=\dfrac{8xy}{(x+2y)^2}$，則 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{⑪}{⑫}$。

D. 空間中一球 $S: x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-1=0$ 外一點 $P(1，1，3)$，由 P 作球 S 的所有切線，其切點爲一圓 C，則此圓的面積爲 $\dfrac{⑬⑭}{⑮}\pi$。

E. 已知 $P(x，y)$ 爲橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的點，試求 $2x+y$ 的最大值？ $⑯\sqrt{⑰⑱}$。

F. 設有甲、乙、丙三個箱子，甲箱有 2 個白球與 4 個紅球，乙箱有 4 個白球與 8 個紅球，丙箱有 1 個白球與 3 個紅球，如果從每箱各取一球，發現這三個球正好有兩個白球，問從甲箱取出的是白球的機率是多少？ $\dfrac{⑲}{⑳}$。

第貳部分：（28%）

說明：第 1、2 及第 3 題為計算證明題，請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號，並寫出演算過程，每題配分標於題末。

1. 證明：對於一切大於 1 的自然數 n，$(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{5})(1+\dfrac{1}{7})\cdots(1+\dfrac{1}{2n-1})>\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$。（8分）

2. 已知$0 \leq x \leq 1$，$f(x)=|2x-1|$，

(1)作$y=f(f(x))$之圖形。（5分）

(2)滿足方程式$f(f(f(x)))=x$的值有幾個？（5分）

3. 設$z_n=(\frac{1+i}{2})^n$，$n=1$，2，3，…，

(1)$z_{n+1}-z_n=$？（2分）

(2)$|z_{n+1}-z_n|=$？（4分）

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}|z_{n+1}-z_n|=$？（4分）

台北區公立高中 91 學年度第二學期指定考科第二次模擬考數學甲答案

第壹部分：

一、單一選擇題

1. 參考答案：(1)

試題解析：$z+\dfrac{1}{z}=1 \Rightarrow z^2-z+1=0 \Rightarrow (z+1)(z^2-z+1)=0$

$\therefore\ z^3=-1$

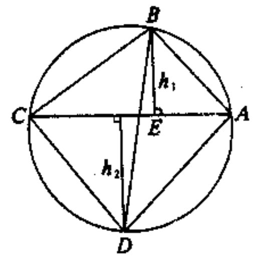
$z^{99}+\dfrac{1}{z^{99}}=(z^3)^{33}+\dfrac{1}{(z^3)^{33}}=-1+(-1)=-2$ ……(1)

2. 參考答案：(2)

試題解析：設 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}$

$=t(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$

$=3t\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AD}$



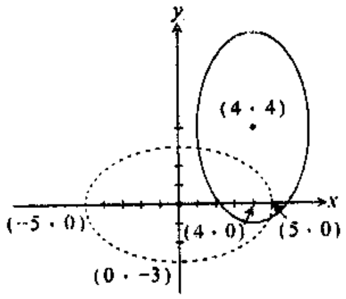
$\because$ B，E，D 共線　$\therefore$ $3t+2t=1$，$t=\dfrac{1}{5}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overline{BE}:\overline{ED}=2:3$

$\triangle ABC:\triangle ACD=h_1:h_2=\overline{BE}:\overline{ED}=2:3$ ……(2)

3. 參考答案：(5)

試題解析：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$



原橢圓爲虛線橢圓

實線橢圓爲旋轉後之圖形

故方程式爲

$\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$

二、多重選擇題

4. 參考答案：(1)(3)(5)

試題解析：由根與係數關係，$ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根爲 α，β，γ

$$\text{則 } \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+r\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

∴ 將 x，y，z 視爲三次方程式之三根

則原方程式爲 $x^3-3x^2-10x+24=0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-4)(x+3)=0$$

$\Rightarrow$ 三根可爲 2，4，-3

5. 參考答案：(1)(4)(5)

試題解析：依甲、乙、丙、丁、戊的順序的轉移矩陣爲

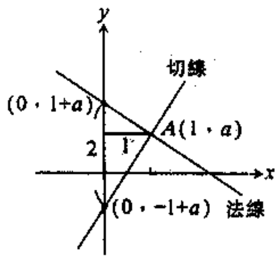
$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}，\text{起始狀態以矩陣 } P_0 \text{ 表示：} P_0=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \to \text{一開始在甲地} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

則一天後之 P_1 爲　　二天後之 P_2 爲　　三天後之 P_3 爲

$$P_1=AP_0=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad P_2=AP_1=\begin{bmatrix} \frac{11}{36} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{11}{36} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \qquad P_3=AP_2=\left[\begin{array}{c} \frac{1}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} \end{array}\right]\begin{array}{l} \to \text{在甲地} \\ \to \text{在乙地} \\ \to \text{在丙地} \\ \to \text{在丁地} \\ \to \text{在戊地} \end{array}$$

6. 參考答案：(1)(3)

試題解析：設切線斜率爲m，切線方程式爲$y-a=m(x-1)$



$$\begin{cases} y=mx-m+a \\ y=x^2-x+a \end{cases}$$

$\Rightarrow\ x^2-x+a=mx-m+a\ \Rightarrow\ x^2-(1+m)x+m=0$

$\because$ 相切 $\therefore\ D=(1+m)^2-4m=0$，$m=1$……切線斜率

法線斜率爲-1

切線方程式：$y=x-1+a$，交y軸$(0，-1+a)$

法線方程式：$y=-x+1+a$，交y軸$(0，1+a)$

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

三、選擇題

A. 參考答案：$\underline{2<x<3}$（⑦$\underline{2}$　⑧$\underline{3}$）

試題解析：$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2)>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}1\ \Rightarrow\ x-2<1\ \Rightarrow\ x<3 \cdots\cdots ① \\ x-2>0\ \Rightarrow\ x>2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①②可得$2<x<3$

B. 參考答案：$\underline{10}$（⑨$\underline{1}$　⑩$\underline{0}$）

試題解析：$\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$\begin{aligned}
\text{又}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right. \\
&\qquad \left.-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]
\end{aligned}$$

$$\text{又}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{65}{264}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{65}{264}$$

$$\Rightarrow\ n=10$$

C. 參考答案：$\underline{\frac{1}{2}}$（⑪ $\underline{1}$　⑫ $\underline{2}$）

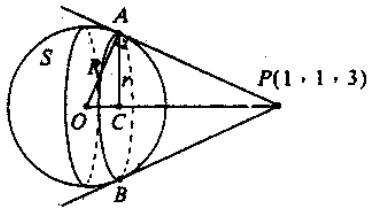
試題解析：因 $\sec^2\theta \geq 1$

$$\therefore \frac{8xy}{(x+2y)^2} \geq 1 \Rightarrow 8xy \geq x^2+4xy+4y^2 \Rightarrow (x-2y)^2 \leq 0$$

$$\because x,y \in R \quad \therefore (x-2y)^2=0 \Rightarrow x=2y \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{2}$$

D. 參考答案：$\underline{\frac{16}{5}}\pi$（⑬ $\underline{1}$　⑭ $\underline{6}$　⑮ $\underline{5}$）

試題解析：如右圖



球 S 的球心 $O(1,-1,-1)$，半徑 $R=2$

$\overline{PA}$，$\overline{PB}$ 爲其中的兩條切線，所求即爲圓 C

又 $\overline{PA}=\sqrt{1^2+1^2+3^2-2(1)+2(1)+2(3)-1}=4$

$\overline{AO}=R=2$，$\overline{PO}=\sqrt{(1-1)^2+(1+1)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $\triangle PAO$ 爲直角三角形且 $\overline{AC} \perp \overline{PO}$

$\therefore$ $\triangle PAO$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{PA}\times\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{PO}\times r$，$r$ 爲圓 C 半徑

$\Rightarrow 4\times 2=2\sqrt{5}\times r \Rightarrow r=\frac{4}{\sqrt{5}}$　$\therefore$ 圓 C 面積爲 $\pi r^2=\frac{16}{5}\pi$

E. 參考答案：$\underline{2\sqrt{29}}$（⑯ $\underline{2}$　⑰ $\underline{2}$　⑱ $\underline{9}$）

試題解析：由柯西不等式得

$$\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\right)(10^2+4^2) \geq (2x+y)^2$$

$$\Rightarrow 116 \geq (2x+y)^2$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{29} \leq 2x+y \leq 2\sqrt{29}$$

F. 參考答案：$\underline{\frac{5}{7}}$（⑲ $\underline{5}$　⑳ $\underline{7}$）

試題解析：$\dfrac{\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{8}{12}\times\frac{1}{4}}{\frac{2}{6}\times\frac{4}{12}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{8}{12}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{12}\times\frac{1}{4}}=\frac{5}{7}$

第貳部分：

1. 參考答案：如下

試題解析：(i) $n=2$ 時，左式 $=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，右邊 $=\frac{\sqrt{5}}{2}$

因爲 $\frac{4}{3}>\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以原不等式成立　　（2 分）

(ii)假設 $n=k$（$k\geq 2$）

$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2k-1})>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}$ 不等式成立

若 $n=k+1$

$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2k+1})$

$>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}(1+\frac{1}{2k+1})$

$=\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\cdot\frac{2k+2}{2k+1}$

$=\frac{2k+2}{2\sqrt{2k+1}}$　　（4 分）

比較 $\frac{2k+2}{2\sqrt{2k+1}}$ 與 $\frac{\sqrt{2k+3}}{2}$ 的大小

$\frac{2k+2}{2\sqrt{2k+1}}-\frac{\sqrt{2k+3}}{2}=\frac{(2k+2)-\sqrt{2k+1}\times\sqrt{2k+3}}{2\sqrt{2k+1}}$

$\because (2k+2)^2>(2k+1)(2k+3)$

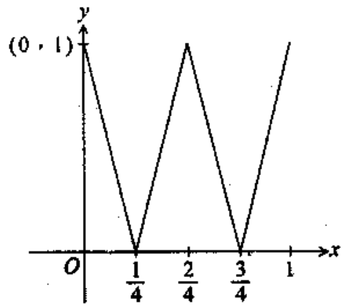
$\therefore (2k+2)-\sqrt{2k+1}\times\sqrt{2k+3}>0$　　（7 分）

故 $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2k-1})(1+\frac{1}{2k+1})>\frac{\sqrt{2k+3}}{2}$

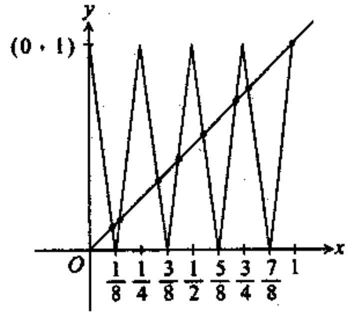
由(i)(ii)可知對一切大於 1 的自然數 n

$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$　　（8 分）

2. 參考答案：(1)圖形如下　　(2)有 8 個解



試題解析：(1)$f(f(x))=\begin{cases} 4x-3，\frac{3}{4}\leq x\leq 1 \\ 3-4x，\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{4} \\ 4x-1，\frac{1}{4}\leq x<\frac{1}{2} \\ 1-4x，0\leq x<\frac{1}{4} \end{cases}$



(2)折線爲$y=f(f(f(x)))$的圖形

與$y=x$有 8 個交點

故$f(f(f(x)))=x$

有 8 個解

3. 參考答案：(1) $(\frac{1+i}{2})^n(\frac{-1+i}{2})$　　(2) $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$　　(3) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

試題解析：(1) $z_{n+1}-z_n=(\frac{1+i}{2})^{n+1}-(\frac{1+i}{2})^n=(\frac{1+i}{2})^n(\frac{-1+i}{2})$

(2) $|z_{n+1}-z_n|=|(\frac{1+i}{2})^n(\frac{-1+i}{2})|$

$=|\frac{1+i}{2}|^n\cdot|\frac{-1+i}{2}|$

$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}|z_{n+1}-z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1}$

$=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^3+(\frac{1}{\sqrt{2}})^4+\cdots$

$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$