台北區公立高中 91 學年度第二學期指定科目考試第一次模擬考

數學乙

第壹部分：（67%）

一、單一選擇題（18%）

說明：第 1 至 3 題為單一選擇題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 1 / 4 題分。未答者，不給分亦不扣分。

1. 若$a=\sin 13°+\cos 13°$，$b=2\sqrt{2}\cos^2 14°-\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，則$a$，$b$，$c$之大小為

(1) $b>c>a$

(2) $b>a>c$

(3) $c>b>a$

(4) $c>a>b$

(5) $a>c>b$

2. 在直角坐標平面上，$\triangle ABC$中，設$A(a，b)$，$B(1，2)$，$C(-1，-1)$，若$\angle BAC$的平分線為$2x+y-1=0$，則$a+3b=$？

(1) 15

(2) 16

(3) 17

(4) -15

(5) -11

3. 在直角坐標平面上，設動點P在直線$x=1$上移動，O為原點，以O為直角頂點作等腰直角$\triangle POQ$，則動點Q的軌跡是下列何種圖形？

(1)圓

(2)一直線

(3)二平行直線

(4)拋物線

(5)雙曲線

二、選填題（49%）

說明：A、B、C、D、E、F、G 各題為選填題，作答於答案卡之「解答欄」所標示的列號（4-18）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

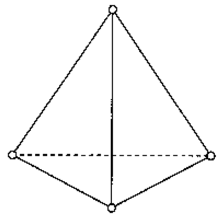
A. 設$f(x)=x^3-6$，$g(x)=x^3+3x+2$，若$f(x)=0$之三根爲α，β，γ，則$g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)$之值＝ ④⑤ 。

B. 設三階方陣$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$，其乘法反元素$A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，則$a_{32}=\dfrac{⑥⑦}{5}$。

C. 在複數平面上，點A表示複數$3+2i$，O爲原點，若以O爲中心，將$\overline{OA}$順時針方向旋轉$\dfrac{3\pi}{4}$後得$\overline{OB}$，設B表示複數$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r>0$），則$\tan\theta=$ ⑧ 。

D. 有一半徑爲 3 公分之實體球置於桌面上，在球體之正上方距離桌面 8 公分處有一光源直射該球體，求在桌面上產生的陰影部分面積＝ ⑨⑩π 平方公分。

E. 有一由 6 支相同木棒及 4 粒相同珠子所製成的正四面體如圖，今欲在頂點的珠子上塗上紅、黃、藍、白四種顏色，每一珠子只能塗一色，可任意塗色，問共有 ⑪⑫ 種塗法。



F. 智華參加「機智答題A獎金」電視節目；節目中設有甲、乙兩套題目，甲套較難，乙套較易，但兩套題目無關。答題規則是：參加者先隨機由甲、乙二套題目中抽出一套題目，再由主持人在該一套題目中隨機選取一題，若參加者答對，則主持人在另一套題目中隨機選取一題給參加者繼續作答；若第一次答錯立即退出比賽。若只答對甲套題目的獎金3000 元，只答對乙套題目的獎金是 2200 元。二題均答對的獎金是 7000 元，若已知智華答對甲套題目的機率爲 0.6，答對乙套題目的機率是 0.7，問智華參加此節目的獲利期望值爲 ⑬⑭⑮⑯ 元。

G. 已知F_1，F_2是橢圓：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的兩焦點，過點$F_1$之直線交橢圓於$A$，$B$兩點，若$\overline{AB}=7$，則$\overline{AF_2}+\overline{BF_2}=$ ⑰⑱ 。

第貳部分：（33%）

說明：一、二、三各題作答於「答案卷」，並必須於題號欄標明題號，且應寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、 根據市場調查結果，預測出某種商品從民國 92 年年初開始的 n 個月內，累積需求量 S_n 萬件將滿足 $S_n=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)$，$n=1$，2，3，…，12，按此預測在今年度內，需求量超過 1.5 萬件的月份是那幾月份？（11 分）

二、 啟明草蝦養殖場放養 20000 隻草蝦，經每天早晨巡視蝦池，發現每天草蝦的死亡量爲前一天存活草蝦的百分之一，問經幾天以後存活草蝦數量已經開始不到原來的一半？（11分）（已知：$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$，$\log 1.1=0.0414$）

三、 二直線 L_1：$\frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$ 與 L_2：$\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$，

(1)是否相交？（3 分）

(2)求包含 L_1，平行 L_2 之平面方程式？（若相交即求 L_1 與 L_2 所決定的平面方程式）（4分）

(3)求二直線的距離＝？（若相交則爲 0）（4 分）

台北區公立高中 91 學年度第二學期指定科目考試第一次模擬考

數學乙參考答案

第壹部分：

一、單一選擇題

1. 參考答案：(1)

試題解析：$a=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 13°+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 13°)=\sqrt{2}(\sin 13°\cos 45°+\cos 13°\sin 45°)$

$=\sqrt{2}\sin 58°=\sqrt{2}\cos 32°$

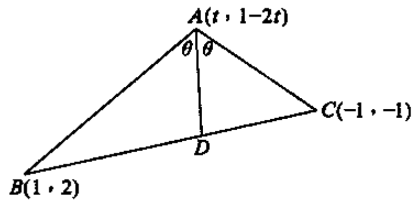
$b=\sqrt{2}(2\cos^2 14°-1)=\sqrt{2}\cos 28°$

$c=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}\cos 30°$　$\because$ $\cos 28°>\cos 30°>\cos 32°$

$\therefore$ $b>c>a$　選(1)

2. 參考答案：(2)

試題解析：設 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 $\angle BAC$



$\because$ 點 A 在 $2x+y-1=0$ 上

$\therefore$ 設 $A(t，1-2t)$

直線 AB 之斜率 $m_{AB}=\frac{-1-2t}{t-1}$

直線 AC 之斜率 $m_{AC}=\frac{2-2t}{t+1}$

$\overleftrightarrow{AD}$ 之斜率 $m_{AD}=-2$

$\because$ $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 $\angle BAC$　$\therefore$ $\tan\theta=\frac{m_{AD}-m_{AB}}{1+m_{AB}m_{AD}}=\frac{m_{AC}-m_{AD}}{1+m_{AC}m_{AD}}$

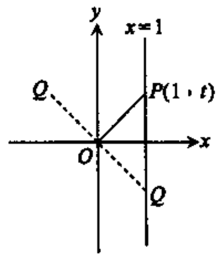
$\Rightarrow$ $\frac{-2-(\frac{-1-2t}{t-1})}{1+(-2)\cdot\frac{-1-2t}{t-1}}=\frac{\frac{2-2t}{t+1}-(-2)}{1+(-2)\cdot\frac{2-2t}{t+1}}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{5t+1}=\frac{4}{5t-3}$ $\Rightarrow$ $t=-\frac{13}{5}$

$\therefore$ $A(-\frac{13}{5}，\frac{31}{5})$　$\therefore$ $a+3b=16$

選(2)

3. **參考答案**：(3)

試題解析：設 $P(1, t)$，$t\in R$，$m_{OP}=t$（OP 直線的斜率）



$\because\ \overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}\quad\therefore\ m_{OQ}=-\dfrac{1}{t}$

設 $Q(m, -\dfrac{1}{t}m)$，$m\in R$

又 $\triangle OPQ$ 為等腰直角 $\triangle$　$\therefore\ \overline{OP}^2=\overline{OQ}^2$

$\Rightarrow\ 1+t^2=m^2+(\dfrac{m}{t})^2\ \Rightarrow\ 1+t^2=\dfrac{m^2(1+t^2)}{t^2}\ \Rightarrow\ m=\pm t$

$\therefore\ Q(t, -1)$ 或 $(-t, 1)$，故動點 Q 為 $y=\pm1$（二平行直線）

選(3)

二、選填題

A. **參考答案**：$\underline{24}$（④ $\underline{2}$　⑤ $\underline{4}$）

試題解析：$\because\ \alpha, \beta, \gamma$ 為 $f(x)=0$ 之三根　$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=0$

且 $\alpha^3-6=\beta^3-6=\gamma^3-6=0$　$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=18$

$\Rightarrow\ g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)=(\alpha^3+3\alpha+2)+(\beta^3+3\beta+2)+(\gamma^3+3\gamma+2)$

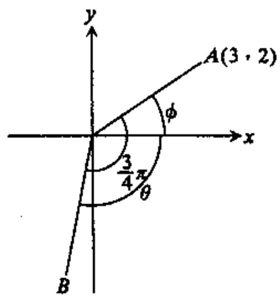
$=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha+\beta+\gamma)+6=18+3\cdot0+6=24$

B. **參考答案**：$\underline{-1}$（⑥ $\underline{-}$　⑦ $\underline{1}$）

試題解析：$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=5$，$A^{-1}=\dfrac{[A_{ij}^*]^T}{\det(A)}$，其中 $A_{ij}^*=(-1)^{i+j}a_{ij}^*$

$\therefore\ a_{32}=\dfrac{(-1)^{3+2}}{5}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=\dfrac{-1}{5}$

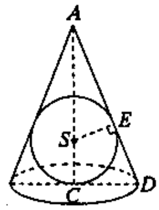
C. **參考答案**：$\underline{5}$（⑧ $\underline{5}$）



試題解析：$\tan\theta=\tan(\phi-\dfrac{3\pi}{4})=\dfrac{\tan\phi-\tan\dfrac{3}{4}\pi}{1+\tan\phi\cdot\tan\dfrac{3\pi}{4}}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{3}-(-1)}{1+\dfrac{2}{3}\cdot(-1)}=5$

D. **參考答案**：$\underline{36}$（⑨ $\underline{3}$　⑩ $\underline{6}$）



試題解析：設陰影部分 $\overline{CD}=r$，$\triangle AES\sim\triangle ACD$

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ES}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}\ \Rightarrow\ \dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{r}$

$\therefore\ r=6$，面積 $=36\pi\,\text{cm}^2$

E. 參考答案：36（⑪ 3　⑫ 6）

試題解析：①四同色　$C^4_1 \times 1 = 4$

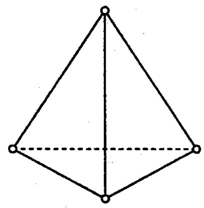
②三同一異色　$C^4_1 \cdot C^3_1 \times 1 = 12$

③二同二同色　$C^4_2 \times 1 = 6$

④二同二異色　$C^4_1 \cdot C^3_2 \times 1 = 12$

⑤四異色　$C^4_4 \cdot \frac{4!}{4 \times 3} = 2$

①+②+③+④+⑤=36 種



F. 參考答案：3518（⑬ 3　⑭ 5　⑮ 1　⑯ 8）

試題解析：先選甲套題目之期望值：

$E_{甲} = \frac{1}{2} \times [3000 \times (0.6 \times 0.3) + 7000 \times (0.6 \times 0.7)] = 1740$ 元

先選乙套題目之期望值：

$E_{乙} = \frac{1}{2} \times [2200 \times (0.7 \times 0.4) + 7000 \times (0.6 \times 0.7)] = 1778$ 元

$\therefore\ E_{甲} + E_{乙} = 1740 + 1778 = 3518$（元）

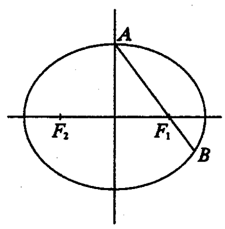
G. 參考答案：13（⑰ 1　⑱ 3）

試題解析：$a=5$，$b=4$

$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} + \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 4a = 20$

$\overline{AB} = \overline{AF_1} + \overline{BF_1} = 7$

$\therefore\ \overline{AF_2} + \overline{BF_2} = 13$



第貳部分：

一、參考答案：7 月，8 月

試題解析：(1) $a_n = S_n - S_{n-1}$ ⋯⋯（2 分）

$$= \frac{21n^2 - n^3 - 5n}{90} - \frac{21(n-1)^2 - (n-1)^3 - 5(n-1)}{90}$$

$$= \frac{1}{90}(-3n^2 + 45n - 27)$$

$$= -\frac{1}{30}(n^2 - 15n + 9)$$

(2) $-\frac{1}{30}(n^2 - 15n + 9) > 1.5$ ⋯⋯（3 分）

$\Rightarrow\ n^2 - 15n + 9 < -45$

$\Rightarrow\ (n-6)(n-9) < 0$

$\Rightarrow\ 6 < n < 9\quad \therefore\ n = 7$，8 ⋯⋯（6 分）

二、參考答案：69天後

試題解析：n天後剩餘草蝦數$=20000(1-\frac{1}{100})^n<10000$ …… (2分)

$\Rightarrow (\frac{99}{100})^n<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log(\frac{99}{100})^n<\log\frac{1}{2}$ …… (1分)

$\Rightarrow n(\log 99-2)<-\log 2$

$\Rightarrow n>\frac{-0.3010}{1.9956-2}=68.4\cdots$ $\therefore$ $n=69$ …… (8分)

三、參考答案：(1)不相交 (2)$2x+5y-7z-46=0$ (3)$\sqrt{78}$

試題解析：(1)設公垂線L交L_1於P與L_2相交於Q

$$\begin{cases} L_1: \frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}=s \\ L_2: \frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}=t \end{cases} \quad s，t\in R$$

$\therefore$ $P(11+4s，-5-3s，-7-s)$，$Q(-5+3t，4-4t，6-2t)$

$$\begin{cases} 11+4s=-5+3t \\ -5-3s=4-4t \\ -7-s=6-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4s-3t=-16 \cdots\cdots ① \\ 3s-4t=-9 \cdots\cdots ② \\ s-2t=-13 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由①、②解得$s=-\frac{37}{7}$，$t=-\frac{12}{7}$代入③

$s-2t=-\frac{37}{7}+\frac{24}{7}\neq -13$

$\therefore$ L_1與L_2不相交 …… (3分)

(2)L_1與L_2之公垂向量爲$2:5:(-7)$

$\therefore$ 含L_1與L_2平行之平面爲$2(x-11)+5(y+5)-7(z+7)=0$

$\Rightarrow 2x+5y-7z-46=0$ …… (4分)

(3)二直線之距離爲點$(-5，4，6)$至平面$2x+5y-7z-46=0$之距離

$=\frac{|-10+20-42-46|}{\sqrt{4+25+49}}=\frac{78}{\sqrt{78}}=\sqrt{78}$ …… (4分)

二、參考答案：69天後

試題解析：n天後剩餘草蝦數 $=20000(1-\frac{1}{100})^n<10000$ ……（2分）

$\Rightarrow (\frac{99}{100})^n<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log(\frac{99}{100})^n<\log\frac{1}{2}$ ……（1分）

$\Rightarrow n(\log 99-2)<-\log 2$

$\Rightarrow n>\frac{-0.3010}{1.9956-2}=68.4\cdots$　$\therefore n=69$ ……（8分）

三、參考答案：(1)不相交　(2) $2x+5y-7z-46=0$　(3) $\sqrt{78}$

試題解析：(1)設公垂線L交L_1於P與L_2相交於Q

$$\begin{cases} L_1: \frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}=s \\ L_2: \frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}=t \end{cases} \quad s，t\in R$$

$\therefore P(11+4s，-5-3s，-7-s)，Q(-5+3t，4-4t，6-2t)$

$$\begin{cases} 11+4s=-5+3t \\ -5-3s=4-4t \\ -7-s=6-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4s-3t=-16 \cdots\cdots ① \\ 3s-4t=-9 \cdots\cdots ② \\ s-2t=-13 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由①、②解得 $s=-\frac{37}{7}$，$t=-\frac{12}{7}$ 代入③

$s-2t=-\frac{37}{7}+\frac{24}{7}\neq-13$

$\therefore L_1$與L_2不相交……（3分）

(2) L_1與L_2之公垂向量爲 $2:5:(-7)$

$\therefore$ 含L_1與L_2平行之平面爲 $2(x-11)+5(y+5)-7(z+7)=0$

$\Rightarrow 2x+5y-7z-46=0$ ……（4分）

(3)二直線之距離爲點 $(-5，4，6)$ 至平面 $2x+5y-7z-46=0$ 之距離

$=\frac{|-10+20-42-46|}{\sqrt{4+25+49}}=\frac{78}{\sqrt{78}}=\sqrt{78}$ ……（4分）