台北區公立高中 91 學年度第二學期指定科目考試第一次模擬考

數學甲

第壹部分：（86%）

一、單一選擇題（24%）

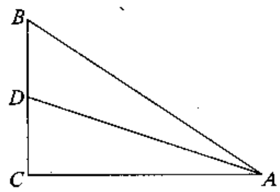
說明：第 1 至 4 題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 1.5 分，未答者，不給分亦不扣分。

1. 三平面 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，且 $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\triangle_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，

   $\triangle_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\triangle_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，則下列那個敘述正確？

   (1)若三平面互相平行，則 $\triangle=0$，$\triangle_x$、$\triangle_y$、$\triangle_z$ 至少有一不爲 0
   (2)若 $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，則三平面的交集有無限多點
   (3)若 $\triangle=0$，$\triangle_x\neq 0$，則三平面完全無交集
   (4)「三平面完全無交集」的充要條件是「$\triangle=0$，$\triangle_x$、$\triangle_y$、$\triangle_z$ 至少有一不爲 0」
   (5)若三平面交於一點，則 $\triangle$、$\triangle_x$、$\triangle_y$、$\triangle_z$ 皆不爲 0

2. 右圖是一個直角三角形 ABC，其中 $\angle C=90°$，$\angle BAD=\theta$，若 $\overline{CD}=\overline{BD}=1$，$\overline{AC}=3$，則 $\tan\theta=$？



   (1) $\frac{3}{11}$
   (2) $\frac{1}{7}$
   (3) $\frac{2}{9}$
   (4) $\frac{1}{9}$
   (5) $\frac{1}{3}$

3. 將 $(2003)^{2003}$ 除以 5 的餘數爲
   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 4
   (5) 0

4. 下列何式正確？

(1) $\tan^{-1}(\tan 240°)=240°$

(2) $\cos^{-1}(\cos 240°)=240°$

(3) $\tan^{-1}(\tan 120°)=120°$

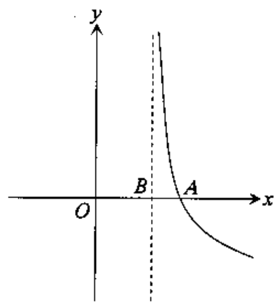
(4) $\sin^{-1}(\sin 120°)=120°$

(5) $\cos^{-1}(\cos 120°)=120°$

二、多重選擇題（32%）

說明：第 5～8 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分；每答錯一個，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分，未答者，不給分亦不扣分。

5. 右圖中的曲線表$y=\log_a(x-k)$的函數部分圖形，其中a、k爲常數，虛線爲其漸近線，點A爲曲線與x軸之交點，點B爲漸近線與x軸之交點，請選出正確選項？



(1)漸近線平行y軸

(2)函數曲線與直線$y=-100$無交點

(3)$\overline{AB}$之距離爲 1

(4)$a<1$

(5)B坐標$(k，0)$

6. 空間中有一直線L：$\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=4-2t \end{cases}$，$t\in R$，請選出正確選項？

(1)L平行y軸

(2)L平行yz平面

(3)L垂直xy平面

(4)L通過$(2，1，0)$

(5)L垂直$2x+2y-z=7$

7. 設正三角形ABC中，$A(2，1)$、$B(7，-6)$，求C坐標？

(1) $\left(\dfrac{9+5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-5+7\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\left(\dfrac{-5+7\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9+5\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $\left(\dfrac{9+7\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-5+5\sqrt{3}}{2}\right)$

(4) $\left(\dfrac{9-7\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-5-5\sqrt{3}}{2}\right)$

(5) $\left(\dfrac{-5-7\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-9-5\sqrt{3}}{2}\right)$

8. 三組數值資料分別如下表中 A、B、C 三組資料，

組別	資料 1	資料 2	資料 3	資料 4	資料 5	資料 6	資料 7	資料 8	資料 9	資料 10
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
C	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

下列敘述何者正確？

(1) A 組平均 $<B$ 組平均 $<C$ 組平均

(2) A 組平均 $<B$ 組平均 $=C$ 組平均

(3) A 組標準差 $<B$ 組標準差 $<C$ 組標準差

(4) A 組標準差 $=B$ 組標準差 $<C$ 組標準差

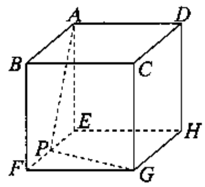
(5) A、C 兩組的相關係數為 -1

三、選填題（30%）

說明：A、B、C、D 四題，請在答案卡上「解答欄」之列號（9-23）中標示答案。每一格完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 如右圖，正立方體 $ABCD$-$EFGH$ 中，P 為 $\overline{EF}$ 的中點，

則 $\cos(\angle APG)=$ $\dfrac{⑨}{⑩⑪}$ 。



B. 一個不透明的箱子中，放入 1 號～10 號等十個號碼球。若從此箱中隨機抽出 3 個球，請問：

(1)所抽中的球號皆未出現連續的機率為 $\dfrac{⑫}{⑬⑭}$ 。

(2)在抽中的第一球是 8 號的條件下，問：所抽中的球號皆未出現連續的機率為 $\dfrac{⑮}{⑯}$ 。

C. 已知 a 為整數，且五次方程式 $5x^5-6x^4-119x^3-46x^2+54x+a=0$ 的最大根為 $3+\sqrt{7}$，則

(1) $a=$ ⑰⑱ 。

(2)此方程式之最大有理根為 $\dfrac{⑲}{⑳}$ 。

D. 在最多可使用 3 個 1，2 個 2，1 個 3，1 個 4 的限制下，可排出 ㉑㉒㉓ 個不同的四位數。

第貳部分：（14%）

說明：此題為計算題，每題配分標於題末，作答在「非選擇題答案卷」上，須寫出演算過程，並註明題號(1)、(2)、(3)。

圓錐曲線$x^2+4xy+y^2-2x-10y=11$，$P(a,b)$爲曲線上一點，則

(1)此曲線的圖形中心爲(h,k)，則$h=$？，$k=$？（3分）

(2)若將原坐標系的x軸、y軸保持方向不變，原點移至(h,k)，則此曲線對新坐標系的方程式爲何？（5分）

(3)求$(a-h)^2+(b-k)^2$之最小值？（6分）

台北區公立高中 91 學年度第二學期指定科目考試第一次模擬考

數學甲參考解答

第壹部分：

一、單一選擇題

1. **參考答案**：(3)

試題解析：因為三平面平行時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，所以(1)(2)(4)的命題均無法成立

而三平面交於一點時，我們可舉一反例，推翻(5)命題

反例證明如後：若三平面交於唯一點$(0，1，1)$，則$\Delta_x=0$

2. **參考答案**：(1)

試題解析：《方法 1》

$\overline{AD}=\sqrt{10}$，$\overline{AB}=\sqrt{13}$

三角形ABD中

利用餘弦定律可得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}^2+\sqrt{13}^2-1^2}{2\sqrt{10}\sqrt{13}}=\dfrac{11}{\sqrt{130}}$

$\Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{3}{11}$（因為$\theta$為銳角，故取正值）

《方法 2》

$$\tan\theta=\tan(\angle BAC-\angle DAC)=\frac{\tan\angle BAC-\tan\angle DAC}{1+\tan\angle BAC\tan\angle DAC}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{3}{11}$$

3. **參考答案**：(2)

試題解析：$(2003)^{2003}=(2000+3)^{2003}$

$$=C^{2003}_{2003}2000^{2003}+C^{2003}_{2002}2000^{2002}\cdot3^1+C^{2003}_{2001}2000^{2001}\cdot3^2+\cdots$$
$$+C^{2003}_{1}2000^1\cdot3^{2002}+3^{2003}$$

$\because$ 2000 可被 5 整除　$\therefore$ 上式可表為$5k+3^{2003}$，k為整數

而$3^{2003}=(3^4)^{500}\cdot3^3=81^{500}\cdot27$

其中$81^{500}=(80+1)^{2003}$依照上述方法可表為$5h+1^{2003}=5h+1$，h為整數

$\Rightarrow\ (2003)^{2003}=5k+3^{2003}=5k+(5h+1)\cdot27=5k+135h+27$

$\Rightarrow$ 被 5 除將餘 2

4. 參考答案：(5)

試題解析：5 個選項中，只有(5)選項之值落入正確值域

其餘正確值修正如後，(1)→ 60°；(2)→ 120°；(3)→(−60°)；(4)→(−60°)

二、多重選擇題

5. 參考答案：(1)(3)(4)(5)

試題解析：本題函數圖形是按對數函數$y=\log_a x$的圖形橫移k單位

既然圖形是右移，所以$k>0$，且可知$B(k,0)$

(1)原漸近線y軸右移而得新漸近線，所以新舊兩漸近線互相平行。應選

(2)交點爲$(a^{-100}+k,-100)$。不可選

(3)A點坐標$(1+k,0)$，$B(k,0)$。所以$\overline{AB}$之距離爲 1。應選

(4)對數函數若爲遞減，則其底<1。所以$a<1$。應選

(5)$B(k,0)$。應選

6. 參考答案：(2)(4)

試題解析：(1)L的方向向量$(0,-1,-2)$，y軸的方向向量$(0,1,0)$，並未平行

(2)yz平面的法向量$(1,0,0)$。而向量$(0,-1,-2)\perp(1,0,0)$

所以L平行yz平面

(3)xy平面的法向量$(0,0,1)$。而向量$(0,-1,-2)$，$(0,0,1)$並不平行

所以L不垂直xy平面

(4)點$(2,1,0)$代入L，可得參數$t=2$，所以L通過$(2,1,0)$

(5)$2x+2y-z=7$的法向量$(2,2,-1)$。而向量$(0,-1,-2)\perp(2,2,-1)$

所以L平行$2x+2y-z=7$，而非垂直

7. 參考答案：(3)(4)

試題解析：$\triangle ABC$爲正三角形

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$旋轉 60° 可得$\overrightarrow{AC}$

又旋轉矩陣$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}\text{ 或 }\begin{bmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{bmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\-7\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\-7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5+7\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-7+5\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\frac{5-7\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-7-5\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C\text{爲}\left(\frac{9+7\sqrt{3}}{2},\frac{-5+5\sqrt{3}}{2}\right)\text{或}\left(\frac{9-7\sqrt{3}}{2},\frac{-5-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

8. 參考答案：(1)(5)

試題解析：A組平均 5.5；B組平均 11；C組平均 15.5 ⇒ A組平均<B組平均<C組平均
標準差爲資料離散程度，B組資料最分散，標準差最大。A、C兩組則相等
A、C兩組的對應資料有$A+C=21$的關係，是完全負相關，相關係數$=-1$

三、選填題

A. 參考答案：$\underline{\dfrac{1}{-5}}$（⑨$\underline{1}$ ⑩$\underline{-}$ ⑪$\underline{5}$）

試題解析：以E爲空間坐標系之原點
$\overline{EF}$、$\overline{EH}$、$\overline{EA}$分別爲x、y、z軸，且以邊長作爲單位長
⇒ $E(0,0,0)$，$A(0,0,1)$，$P(0.5,0,0)$，$G(1,1,0)$
⇒ $\cos(\angle APG)=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PG}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PG}|}=\dfrac{1}{-5}$

B. 參考答案：(1)$\underline{\dfrac{7}{15}}$（⑫$\underline{7}$ ⑬$\underline{1}$ ⑭$\underline{5}$）　(2)$\underline{\dfrac{4}{9}}$（⑮$\underline{4}$ ⑯$\underline{9}$）

試題解析：(1)S：抽 3 球的樣本空間
A：3 個球號碼皆不連續的事件
B：所抽 3 球中含 8 號的事件
$n(S)=C^{10}_3=120$
$n(A)=C^8_3=56$
所求$=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{56}{120}=\dfrac{7}{15}$

(2)$n(B)=C^9_2=36$
$n(A\cap B)$
case1：除了 8 號外，其餘兩號均比 8 小
⇒ 分布在 1～6，且不相鄰
⇒ $\underbrace{\boxed{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6}}_{\text{取 2 個不相鄰}}$，8
⇒ 方法數$C^5_2=10$
case2：除了 8 號外，其餘兩號一個比 8 小，另一比 8 大
⇒ 一定有 10 號，及 1～6 其中之一
⇒ $\underbrace{\boxed{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6}}_{\text{取其中之一}}$，8，10
⇒ 方法數 6

所求$=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{10+6}{36}=\dfrac{4}{9}$

C. 參考答案：(1) $\underline{-8}$（⑰ $\underline{-}$　⑱ $\underline{8}$）　(2) $\underline{\frac{1}{5}}$（⑲ $\underline{1}$　⑳ $\underline{5}$）

試題解析：題目所給方程式爲整數係數方程式

而以 $3+\sqrt{7}$ 爲根的整數係數方程式中，最低次爲 $x^2-6x+2=0$

（最低次整數係數方程式的求法如下：

$x=3+\sqrt{7} \Rightarrow x-3=\sqrt{7} \Rightarrow (x-3)^2=7 \Rightarrow x^2-6x+2=0$）

$\Rightarrow$ $5x^5-6x^4-119x^3-46x^2+54x+a$ 必爲 x^2-6x+2 之倍式

$\Rightarrow$ 利用除法得

$5x^5-6x^4-119x^3-46x^2+54x+a=(x^2-6x+2)(5x^3+24x^2+15x-4)$

$\Rightarrow a=-8$

再利用一次因式檢驗法

試 ±1，±2，±4，$\pm\frac{1}{5}$，$\pm\frac{2}{5}$，$\pm\frac{4}{5}$ 等 12 個有可能的有理根

得 $5x^3+24x^2+15x-4$ 有三個有理根 -1，-4，$\frac{1}{5}$

（事實上，當試出 -1 爲有理根時，即可用因式分解或公式解去得其他兩根）

D. 參考答案：$\underline{114}$（㉑ $\underline{1}$　㉒ $\underline{1}$　㉓ $\underline{4}$）

試題解析：

組合情形	組合數	排列數
三同一異	3	$3\times\frac{4!}{3!}=12$
二同二同	1	$\frac{4!}{2!\,2!}=6$
二同二異	$C^2_1\cdot C^3_2=6$	$6\times\frac{4!}{2!}=72$
四者皆相異	1	$4!=24$
合計		114

第貳部分：

參考答案：(1) $\underline{(3,-1)}$　(2) $\underline{x^2+4xy+y^2=9}$　(3) $\underline{3}$

試題解析：(1) $\begin{cases}2h+4k-2=0\\4h+2k-10=0\end{cases} \Rightarrow (h,k)=(3,-1)$

(2)以 $x=X+3$，$y=Y-1$ 代入得 $X^2+4XY+Y^2=9$

(3)利用坐標軸旋轉得新方程式 $\frac{(x')^2}{3}-\frac{(y')^2}{9}=1$

題意 $(a-h)^2+(b-k)^2$ 爲任意點 P 至圖形中心之距離平方

由方程式可知此曲線爲雙曲線，貫軸長 $2\sqrt{3}$

所以任意點 P 至圖形中心之最短距離爲 $\sqrt{3}$

$(a-h)^2+(b-k)^2$ 之最小值爲 3