北一女中九十一學年度第二學期第一次段考高三數學科理組試卷

壹、是非題：60%，每小題4%。

(一) 設 $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & x>0 \end{cases}$　(A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$　(B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-3$

(C)因為 $f(1)>0$, $f(-1)<0$, 所以在開區間 (-1,1) 之中有一數 c, 使得 $f(\mathrm{c})=0$

(D)函數 $f(x)$在$(0,\infty)$中為連續函數。

(二) $\lim\limits_{x\to 0} k(x)=\alpha$, $f(x)=[k(x)]$, $g(x)=\sin(k(x))$, $h(\mathrm{x})=2^{k(x)}$ 其中[ ]為高斯符號

(E) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=[\alpha]$，　(F) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\sin\alpha$，　(G) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=2^{\alpha}$。

(三) 下列數列的敘述是否正確？

(H)若$\{a_n\}$收斂, $c_n>0$且$\{c_n\}$發散, 則$\left\{\dfrac{a_n}{c_n}\right\}$必發散

(I)若$\{a_n\}$發散, $\{b_n\}$發散, 則$\{a_n\cdot b_n\}$必發散　(J)若$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$收斂, $\{b_n\}$發散, 則$\{a_n\}$必發散

(四)下列數列的極限值是否正確？　(K) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$　(L) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{10^n}=1$　(M) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+5}=1$

(N) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.9}=0$　(O) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1}}{n}+\dfrac{\sqrt{2}}{n}+\dfrac{\sqrt{3}}{n}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n}\right)=0$

貳、填充題：30%，每小題6%。

(一)若 $f(x)=[x]$ ([ ]為高斯函數), 則 $\lim\limits_{x\to 0^-}[f(x^2-x)+f(x-x^3)]=$ ________

(二)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n+1}{4a_n+2}=1$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________

(三)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{4n+5}=3$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+a_n}{7n-4}=$ ________

(四)若 $a,b\in R$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=2$, 則 $a+b=$ ____

(五)設 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________。

參、證明與計算：10%。

在數列 $\{a_n\}$中, $a_1=8$, $a_n=\dfrac{6a_{n-1}-7}{5}$ $(n\ge 2)$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是否存在？詳細說明理由.

北一女中九十一學年度第二學期第一次段考高三數學科理組參考答案

壹、是非題：60%，每小題 4%。

(A) ○	(B) ×	(C) ×	(D) ○	(E) ×	(F) ○	(G) ○	(H) ×
(I) ×	(J) ○	(K) ○	(L) ×	(M) ○	(N) ×	(O) ×	

貳、填充題：30%，每小題 6%。

(一) −1	(二) −1	(三) 2	(四) −1	(五) 3

參、證明與計算：10%。

在數列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 8, a_n = \dfrac{6a_{n-1} - 7}{5} \ (n \geq 2)$, 請問 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是否存在？詳細說明理由 .

答：假設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6a_n - 7}{5} \Rightarrow k = \dfrac{6k-7}{5} \Rightarrow k = 7$。

但由數學歸納法可得 $a_n \geq 8$,

且 $a_n - a_{n-1} = \dfrac{6a_{n-1} - 7}{5} - a_{n-1} = \dfrac{a_{n-1} - 7}{5} > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 為遞增數列 ,

綜合上述兩項資料可得與 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7$ 矛盾 ,

所以假設不成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在 。