

北一女中90學年度第一學期期末考高三理組數學科試卷題

一. 單選題[每題4分, 共20分]

1. x, y 是正整數, 且 $x+y=10$, 則積 xy 最小值為(A)8 (B)9 (C)10 (D)11 (E)25
2. 已知定實數 $a > 1$, $f(x) = |ax+1| + |x-a|$ 之最小值為(A) $a + \frac{1}{a}$ (B) $a^2 + 1$ (C) $a^2 - 1$
(D) $a + 1$ (E) $a - 1$.
3. 設 $\log a > 0$ 且 $\log b < 0$, 則以下何者為真?(1) $\log \frac{a}{b} > 0$ (2) $\log b^2 > 0$ (3) $\log \frac{1}{a} > 0$
(A)僅(1) (B)僅(2) (C)僅(3) (D)僅(1)與(2) (E)僅(2)與(3)
4. 以下何者為真?
(1)對正數 a, b , $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 有最小值為2
(2)對正數 a_1, a_2 , $(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})(a_1 + a_2)$ 有最小值為2
(3)對正數 a_1, a_2, a_3 , $(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3})(a_1 + a_2 + a_3)$ 有最小值為9
(A)僅(1) (B)僅(2) (C)僅(3) (D)僅(1)與(2) (E)僅(2)與(3)
5. 若 $0 < \theta < 2\pi$, 則 $2\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2$ 之最大值為(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

二、多重選擇題(至少有一個是對的, 每題6分共24分)

6. 給定四相異實數 x_1, x_2, x_3, x_4 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $x \in [x_1, x_4]$, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, 設
 $f(x) = \sum_{i=1}^4 (x - x_i)^2$, 則 $f(x)$ (A)當 $x = x_1$ 或 $x = x_4$ 時有最大值 (B)當 $x = x_1$ 或 $x = x_4$ 時有
最小值 (C)當 $x = \bar{x}$ 時有最大值 (D)當 $x = \bar{x}$ 時有最小值 (E)無最大值, 亦無最小值.
7. 若 $|x| > 1$, 則(A) $x \geq \frac{1}{x}$ (B) $x^2 - x + 1 > 0$ (C) $(x+5)^2(x+1)(x-1) \geq 0$ (D) $|x^2 - 4| > 0$ (E) $\frac{1}{x} < 1$
8. 設 $0 < x < 4\pi$, $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = 4 \sin x \cos x$, 下敘述何者成立?
(A)設 $\sin x + \cos x = t$, 則 $4 \sin x \cos x = 2t^2 - 2$ (B) $y = f(x)$ 之最大值為 $\sqrt{2}$
(C) $y = g(x)$ 之最大值為2 (D) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的交點有四個
(E) $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的交點之 y 座標為 $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$
9. 設 $a, b \in R$ 且 $a - 2b \geq -6$, $7a - 2b \leq 18$, $5a + 2b \geq 6$, 則
(A) $\frac{b+1}{a+1} \leq 5$ (B) $\frac{b+1}{a+1} \geq -1$ (C) $\frac{b+1}{a+1} \geq -\frac{1}{3}$ (D) $-2 \leq 2a + b \leq 14$ (E) $-4 \leq 2a + b \leq 18$

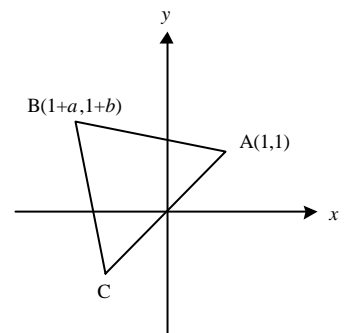
(接上頁)

三. 填充題[每一格6分共36分]

1. 不等式 $2x^2 + (m-2)x + 2 > x^2 + x + 1$ 的解 x 為任意實數, 試求實數 m 的範圍_____
2. 對數不等式 $(\log_{0.5} x)^2 \leq \log_{0.5} \frac{x}{4}$ 的解為_____
3. 不等式 $x(1-x^2)^3 > 7(1-x^2)^3$ 之解為_____
4. 不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < \frac{2}{x+2}$ 之解為_____
5. 在限制條件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下, 求函數 $f(x, y, z) = 3x + 4y - 12z$ 的最大值為_____
6. 在限制條件 $x^2 + y^2 = 25, 0 \leq x \leq 4, y \geq 3$ 下, 求函數 $f(x, y) = x + y$ 的範圍為_____

四. 計算證明題:(每大題十分, 共二十分)

1. 如圖已知A點(1, 1), 另在第二, 三象限(含其邊界之座標軸), 各取一點B, C, 使 $\triangle ABC$ 成為正三角形, 並令 $B(1+a, 1+b)$, 則因B在第二象限, $1+a \leq 0, 1+b \geq 0$,
(1) 試用 a, b 之一次式表示點C的座標並寫出不等式表示它在第三象限
(2) 作圖, 以 a 為橫座標, b 為縱座標, 將 (a, b) 範圍圖示出



2. 已知多項式 $f(x) = x^3 + kx^2 - 2x + 4$ (其中 $k \in R$), 方程式 $f(x) = 0$ 有一根 $1+i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)
(1) 求 k 值 = ? (2) 若實數 a 滿足 $f(a) < 0$, 試求 a 的範圍?

北一女中90學年度第一學期期末考高三理組數學科答案

一. 單選題[每題4分, 共20分]

1	2	3	4	5
B	A	A	E	D

二. 多重選擇題(至少有一個是對的, 每題6分共24分)

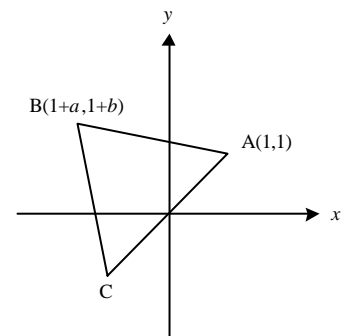
6	7	8	9
AD	BCE	ABC	ABCDE

三. 填充題[每一格6分共36分]

1	2	3
$1 < m < 5$	$\frac{1}{4} \leq x \leq 2$	$x < -1$ 或 $1 < x < 7$
4	5	6
$-2 < x < -1$ 或 $-\frac{2}{3} < x < 0$	13	$5 \leq x + y \leq 5\sqrt{2}$

四. 計算證明題:(每大題十分, 共二十分)

1. 如圖已知A點(1, 1), 另在第二, 三象限(含其邊界之座標軸), 各取一點B, C, 使 $\triangle ABC$ 成為正三角形, 並令 $B(1+a, 1+b)$, 則因B在第二象限, $1+a \leq 0, 1+b \geq 0$,



- (1) 試用 a, b 之一次式表示點C的座標並寫出不等式表示它在第三象限

- (2) 作圖, 以 a 為橫座標, b 為縱座標, 將 (a, b) 範圍圖示出

答: (1) $C\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} + 1\right)$ (2)

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1 \leq 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq -1 \\ b \geq -1 \\ a - \sqrt{3}b + 2 \leq 0 \\ \sqrt{3}a + b + 2 \leq 0 \end{cases}$$

2. 已知多項式 $f(x) = x^3 + kx^2 - 2x + 4$ (其中 $k \in R$), 方程式 $f(x) = 0$ 有一根 $1+i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)

- (1) 求 k 值=? (2) 若實數 a 滿足 $f(a) < 0$, 試求 a 的範圍?

答: (1) $k = 0$ (2) $a < -2$