

北一女中九十學年度第一學期第二次段考高三理組數學科試題

一、多重選擇題:(每題 7 分, 共 63 分)

(第 1 頁)

1. 已知橢圓: $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$, 將坐標軸旋轉一正銳角 q , 使 x 軸與橢圓的對稱軸重合, 令橢圓至原點的最遠與最近距離分別為 a, b , 則下列何者為真?

(A) $q = \frac{p}{6}$ (B) $a = 2$ (C) $b = 1$ (D) 橢圓的中心坐標為(0,0)

(E) 橢圓的長軸方程式為 $x - \sqrt{3}y = 0$ 。

2. 令 k 為實數, 並設二次方程式 $y^2 = 2x + (1-k)x^2$ 的圖形為 G , 則下列何者正確?

(A) $0 \leq k < 1$, G 是雙曲線 (B) 當 $k = 1$, G 是拋物線 (C) $1 < k < 2$, G 是橢圓
(D) 當 $k = 2$, G 是圓 (E) 當 $k < 0$, G 是兩直線 。

3. 下列那些方程式的圖形表示一完整的拋物線?

(A) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$ (B) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 3 = 0$ (C) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x - 12y - 12 = 0$

(D) $4x^2 - xy - 3y^2 + x - y - 10 = 0$ (E) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 3x - 8y - 10 = 0$

4. 定義: 若經平移、旋轉坐標軸後, 曲線 Γ_1 可以重疊在另一曲線 Γ_2 , 則稱 Γ_1 與 Γ_2 全等。

考慮下列曲線: (A) $xy = 1$ (B) $x^2 - y^2 = 1$ (C) $y^2 - x^2 = 2$ (D) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$

(E) $2x^2 - y^2 = 1$ 其中有些(其個數 ≥ 2)是全等的, 而其餘均不全等, 請將全等者挑選出來。

5. 已知 A, B, C 均為 n 階方陣, $O_{n \times n}$ 為 n 階零矩陣, 則下列何者為真?

(A) $\det(A+B) = \det A + \det B$ (B) 若 $k \in R$, 則 $\det(kA) = k^n \det A$

(C) 若 $AB=AC$ 且 $\det A \neq 0$ 則 $B=C$ (D) 若 A, B 均為可逆方陣, 則 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(E) 若 $AB=BA$ 則 $(A+B)^n = C_0^n A^n + C_1^n A^{n-1}B + C_2^n A^{n-2}B^2 + \dots + C_k^n A^{n-k}B^k + \dots + C_n^n B^n$

6. 若 $A_q = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$, 則下列敘述何者正確?

(A) $(A_q)^{-1} = A_q^T$ (B) $A_a + A_b = A_{a+b}$ (C) 若 $q = \frac{p}{6}$ 則 $A_q^n = I_2$ 的最小正整數 n 為 12

(D) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 則 $B^{36} = \begin{bmatrix} 2^{36} & 0 \\ 0 & 2^{36} \end{bmatrix}$

(E) 若 $q = \frac{p}{6}$ 則 $A_q + A_q^2 + \dots + A_q^{100} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

7. 若 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，則下列敘述何者為真？ (A) A 滿足 $A^2 - 7A + 10I_2 = 0$

(B) 若 $P(x,y)$ 表平面上的點，經過 A 的變換後之像為點 $(4x+2y, x+3y)$ (C) 直線 $x - y = 0$ 經過 A 之變換後的像為 $2x - 3y = 0$ (D) 圓 $x^2 + y^2 = 1$ 經 A 的變換後得曲線為

$$10x^2 + 17y^2 - 4xy = 100 \quad (\text{E}) \quad \text{設 } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 則 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 則下列何者為真？ (A) $\det A = 0$ (B) $A^2 = 7A$ (C) $A^n = 7^{n-1}A$

(D) 平面上任意點 $P(x,y)$ ，經 A 之變換後都會映射至一固定的直線上

$$(\text{E}) \quad A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = \frac{7^{100} - 1}{6} A$$

9. 設甲袋有 100 元鈔票兩張，乙袋有 50 元鈔票 3 張。今自甲、乙兩袋隨機各取一張交換，稱為一局，則長期交換過程中，下列何者為真？

(A) 當甲袋持有 150 元的狀態中，經一局交換後使其持有 100 元的機率為 $\frac{1}{3}$

(B) 當甲袋持有 150 元的狀態中，經一局交換後使其持有 150 元的機率為 $\frac{1}{2}$

(C) 第三局結束時，甲袋分別持有 200 元，150 元，100 元的機率分別為 $\frac{3}{36}$, $\frac{23}{36}$, $\frac{10}{36}$

(D) 第三局結束時，乙袋持有錢幣的期望值為 $\frac{3775}{18}$ 元

(E) 依此長期交換後，甲袋持有錢幣的期望值為 140 元。

二、計算題:共 37 分

1. 設二次方程式 $4x^2 + 4xy + ay^2 + bx - 3y + c = 0$ 的圖形表一直線，試求 a, b, c 之值。(10 分)

2. 方程式 $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$ 經坐標軸平移、旋轉後可得:

(1) 曲線名稱為何? (2) 其中心坐標為何? (3) 正焦弦的長為何? (10 分)

3. (1) 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 且 X 為二階方陣，若 $AX = A^2$ ，試求 $X = ?$ (8 分)

(2) 設 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 試求: (a) $\det A = ?$ (b) 寫出 $A^{-1} = ?$ (9 分)

北一女中九十學年度第一學期第二次段考高三理組數學科答案

高三____班 座號:____號 姓名:_____

一、多重選擇題: (每題 7 分)

1.	2.	3.
ABCDE	ABCD	BE
4.	5.	6.
AC	BCDE	ABCDE
7.	8.	9.
ABCDE	ABCDE	ABCDE

二、計算題:共 37 分

<p>1.</p> $(a, b, c) = (1, -b, \frac{9}{4})$	<p>2.</p> <p>(1)橢圓 (2)$(-1, 2)$ (3)$\frac{8}{3}$</p>
<p>3.(a)</p> <p>4</p>	<p>3.(b)</p> $\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$