

北一女中 90 學年度第一學期期末考高二數學科試題

一、多選題：(10 分)

下列哪一個條件是使 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 的充分條件：

- (A) 平面上三直線 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $L_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0$ 恰交於一點。
 (B) 空間中 $A(a_1, b_1, c_1)$ 、 $B(a_2, b_2, c_2)$ 、 $C(a_3, b_3, c_3)$ 三點共線。
 (C) 三平面 $E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $E_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ 恰交於一點。
 (D) 三向量 $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ 、 $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ 、 $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$ 共平面。

(E) 三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 無解。

二、填充題：(每格 7 分)

1、若我們想用高斯消去法解方程組： $\begin{cases} x + 3y - 6z = 23 \\ 2x + 4y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 19 \end{cases}$ ，將方程組的增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 19 \end{array} \right]$

利用矩陣的列運算操作後，可以得到下面的矩陣： $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 0 & -2 & 13 & -41 \\ 0 & 0 & -38 & k \end{array} \right]$ ，則常數 $k =$ _____。

2、設 x, y, z 皆為非 0 實數，且 $\frac{4y - 7z}{x} = \frac{2x - 2z}{5y} = \frac{x + 2y}{z}$ ，則 $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ 之值 = _____。

3、 $L_1: \begin{cases} ax + y + z = a - 3 \\ x + ay + z = -2 \end{cases}$ ， $L_2: \begin{cases} x + ay + z = -2 \\ x + y + az = -2 \end{cases}$ ， $L_3: \begin{cases} x + y + az = -2 \\ ax + y + z = a - 3 \end{cases}$ ，若 L_1, L_2, L_3 三直線互異，且兩兩互相平行，則 $a =$ _____。

4、設圓 C 與直線 $L: 4x + 3y + 17 = 0$ 相切於 $P(-2, -3)$ ，且圓 C 的半徑是 10，圓心在第一象限，則圓 C 的方程式為_____。

5、若自點 $P(6, -7)$ 作圓 $x^2 + y^2 = 5$ 的切線，則切點坐標為_____。(兩解)

6、二圓 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 與 $C_2: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ 相交於 A, B 兩點，則公弦 \overline{AB} 的長 = _____。

7、在 xy 平面上 $A(1, 2), B(-3, 0)$ ，若點 $P(x, y)$ 在以 \overline{AB} 為直徑的圓上移動，則 $2x + y - 1$ 的最大值為_____。

8、點 $P(1, 6, -5)$ 在球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z + k = 0$ 上，若平面 E 與球面相切於 P 點，則平面 E 的方程式為_____。

9、設球面方程式為 $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ ，若有一直線 $L: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$ 交球面於 P, Q 兩點，則線段 \overline{PQ} 之中點坐標為_____。

10、一球面 S 通過點 $(3, -1, 2)$ ，且與 zx 平面之交線為圓 $(x-1)^2 + (z+1)^2 = 18$ ，則球面 S 的方程式為_____。

11、設直線 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + (z+2)^2 = r^2$ 相切，則切點坐標為_____。

北一女中 90 學年度第一學期期末考高二數學科答案

一、多選題：(每個選項 2 分，共十分)

(ABDE)

二、填充題：(每格 7 分，共 77 分)

1J 114	2J $-\frac{41}{98}$	3J - 2	4J $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 100$
5J $(2, 1), (-\frac{22}{17}, -\frac{31}{17})$	6J $\sqrt{30}$	7J 3	8J $2x - 6y + 3z = -49$
9J $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 3)$	10J $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 22$	11J $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$	

三、計算題：(13 分)

三平面 $E_1: kx + 2y + 3z = k$, $E_2: 2x + ky + 3z = 2$, $E_3: 2x + 3y + kz = 2$

(1) 若三平面恰交於一點，則 k 值的條件為何？(4 分) 又此交點坐標是多少？(4 分)

(2) 若三平面互異，且交於一線，則 k 值 = ? (5 分)

【解】

(1) $k \neq -5, 2, 3$; 交點坐標(1, 0, 0) (2) - 5