台北區公立高中 90 學年度第二學期第三次指定科目模擬考試(甲)

第壹部分：(共 78 分)

一、單一選擇題(佔 10 分)

說明：第 1.至第 2.題為單一選擇題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯倒扣 1.25 分。未答者，不給分亦不扣分。

1. 三角形 ABC 之邊長爲 a、b、c，外接圓半徑 R。假設 a、b、c 均小於 R，則此三角形爲(1)銳角三角形　(2)直角三角形　(3)鈍角三角形　(4)正三角形　(5)無法判斷

2. 設 $a\neq 0$ 若函數 $f(x)=ax^3+6x^2+(15-3a)x+1$ 有極大值與極小值，求實數 a 的範圍
(1) $1<a<4$　(2) $a<-1$ 或 $a>6$　(3) $a<-3$ 或 $a>5$　(4) $a<1$ 或 $a>4$　(5) $1<a<3$

二、多重選擇題(佔 32 分)

說明：第 3.至第 6.題為多重選擇題，每題各有五個選項，其中至少有一個選項是正確的。選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項可得 1.6 分，完全答對得 8 分，每答錯一個到扣 1.6 分。未答者，不給分亦不扣分。

3. 已知三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+2$，得商式爲 $2x^2-15x+52$，餘式爲 -119；若 $f(x)$ 除以 $x-3$，得商式爲 $2x^2-5x+7$，餘式爲 6，試問下列哪幾個選項是正確的？
(1)對每一大於 3 的實數 r 都有 $f(r)\geq 0$　　(2)對每一小於 -2 的實數 r 都有 $f(r)\leq 0$
(3)方程式 $f(x)=0$ 的實根必小於 2　　(4)方程式 $f(x)=0$ 有三實根
(5)方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根

4. 直線 $y=x$ 與下列哪些曲線的交點有兩個？
(1) $x^2-y^2=1$　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$　(3) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　(4) $x^2+y^2=1$　(5) $x^2=4y$

5. 下列何者的極限值不存在？
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{5}{3})^n(\dfrac{2}{5})^{n-1}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$　(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6. 設 5 位學生作 A、B 兩項測驗成績如右表
(1)A、B 兩項測驗中，測驗 A 的變異較大
(2)測驗 B 之四分位差較大
(3)A、B 兩項的相關係數爲 0.27
(4)B 對 A 之迴歸線爲 $2x-y=0$
(5)當測驗 $A=25$ 時，B 之預測值約爲 34

		學				生
		甲	乙	丙	丁	戊
測驗	A	1	3	5	6	10
	B	2	5	10	15	18

三、選填題(佔 36 分)

說明：A.、B.、C.、D.、E.、F.各題為選填題，作答於答案卡上「解答欄」所標示的列號(7)~(23)內。每題完全答對得 6 分，答錯不倒扣。未答者，不給分亦不扣分。

A. 平面上有一向量 $\vec{a}=(-1, \sqrt{3})$，又與 $\vec{a}$ 夾角爲 60° 且長爲 1 的單位向量有兩個，其中一個爲向量 $(-1, 0)$，另一個爲向量 $(t, k\cdot t)$，k、t 爲實數，則 k 之值爲 ＿(7)$\sqrt{(8)}$＿ 。

B. 已知方程式 $x^3+mx^2+nx+1=0$ 的三根中有兩根爲有理數，若 m、n 爲整數
則 $m^2+n^2=$ ＿(9) *or* (10)(11)＿ 。

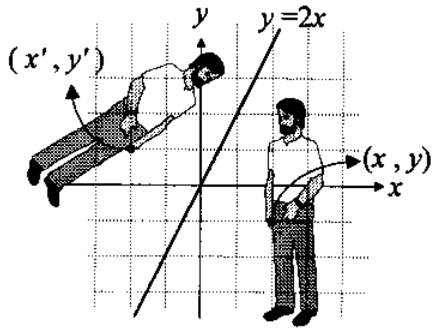
C. 一球面 S 與 xy 平面的截圓爲 $(x-1)^2+(y+1)^2=5$，則過球面上一點 $(3, 1, 3)$ 之切平面方程式爲 $ax+by+cz=11$，其中有序數列 $(a, b, c)=$ ＿((12), (13), (14))＿ 。

D. 已知圓心 $(4, 2)$ 的圓 C 與 x 軸相切，若自點 $A(-2, 1)$ 發射光線 L 經 x 軸反射後與此圓相切(L 不可在與 x 軸接觸前先碰到圓 C)，則光線 L 所在的直線斜率爲 $\dfrac{-9-\sqrt{(15)(16)}}{(17)(18)}$ 。

E. 設袋中有 42 個相同的球，分別標上 1, 2, 3, ..., 41, 42 等四十二個數字。甲、乙兩人各自袋中任意取出一球，然後比較取出球上數字的大小。 設每一個球被取出的機會均等，且各人取後球仍放回袋中，則甲取出球上數字不小於乙取出球上數字的機率爲 $\dfrac{(19)(20)}{(21)(22)}$ 。

F. 如圖，在直角坐標平面上，直線 $y=2x$ 爲兩個人物圖形的對稱軸，亦即對圖形上每一個坐標(x,y)，存在一個矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$使得$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

則 $a+b+c+d=$ ___(23)___ 。



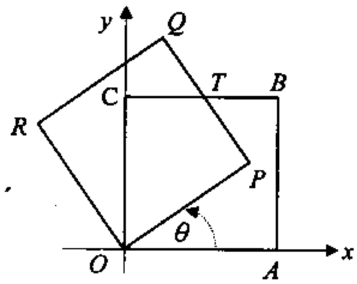
第貳部分：(共 22 分)

說明：將一、二題作答於「非選擇題答案卷」並註明題號。需寫出計算過程或理由，否則不予計分。每題配分標於題末。

一、設有四個頂點爲 $O(0,0)$、$A(1,0)$、$B(1,1)$、$C(0,1)$的正方形，今將此正方形繞原點 O 旋轉角 θ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$)後，得到另一個正方形

(1) 當 $\theta=\tan^{-1}\frac{3}{4}$時，試求四邊形 $OPTC$ 面積。(5 分)

(2) 請以 θ 來表示兩正方形重疊的四邊形 $OPTC$ 面積。(5 分)



二、設曲線 Γ : $x^2-xy+y^2=2$

(1)求橢圓 Γ 在原坐標系中的焦點坐標。 (6 分)

(2)若 $P(x,y)$是 Γ 上任意一點，則 x^2+y^2 之最大值及最小值爲何？ (6 分)

第三次指定科目模擬考答案(數學甲)

數學甲

第壹部分：(共 78 分)

一、單一選擇題(佔 10 分)

1. (3)　2. (4)

二、多重選擇題(佔 32 分)

3.(1)(2)(3)(5)　4. (3)(4)(5)　5.(1)(4)　6. (1)(2)

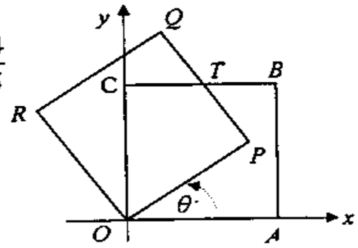
三、選填題(佔 36 分)

A. $\sqrt{3}$　B. 2,18　C.(2,2,1)　D. $\dfrac{-9-\sqrt{41}}{16}$　E. $\dfrac{43}{84}$　F.8

第貳部分：(共 22 分)

一、(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

(1)



$\theta=\tan^{-1}\dfrac{3}{4}\therefore \tan\theta=\dfrac{3}{4},\sin\theta=\dfrac{3}{5},\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

由圖知P坐標爲$(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})$,設$T$坐標爲$(a,1)$

$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{OP}=0$,得 $a=\dfrac{1}{2}$ ……….(3 分)

∴四邊形 $OPTC$ 爲鳶形，四邊形 $OPTC$ 面積= $2\times\Delta OCT=\dfrac{1}{2}$ …….(2 分)

(2)由圖知 P 坐標爲$(\cos\theta,\sin\theta)$

設 T 坐標爲$(a,1)$

得$\overrightarrow{PT}=(a-\cos\theta,1-\sin\theta)$

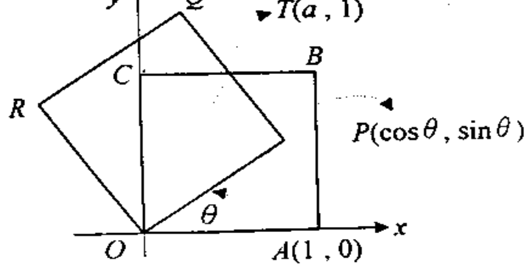
$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\sin\theta)$

由$\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{OP}$知　$(a-\cos\theta,1-\sin\theta)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=0$

…得 $a=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$　……….(3 分)

又∵四邊形 $OPTC$ 爲鳶形，

∴四邊形 $OPTC$ 面積= $2\times\Delta OCT=2\times\dfrac{1}{2}\overline{OC}\times\overline{OT}=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$…(2 分)



二、(1) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\cot 2\theta=\frac{1-1}{1}=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\end{cases}$ 代入原式得 $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{\frac{4}{3}}=1$…………(4分)

其焦點 $(x_0',y_0')=(-\sqrt{\frac{8}{3}},0),(\sqrt{\frac{8}{3}},0)$

原焦點 $(x_0,y_0)=(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}),(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$ ………(2分)

(2) 4 , $\frac{4}{3}$

大圓 $x^2+y^2=4$ 上有最大值 4…………(3分)

小圓 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$ 上有最小值 $\frac{4}{3}$…………(3分)