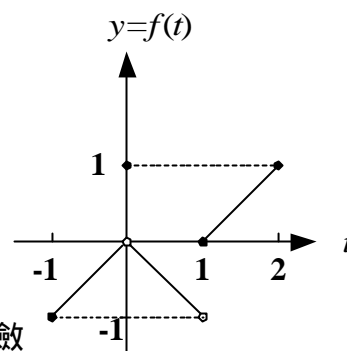


北一女中 90 學年度第二學期第一次段考高三數學甲試題

第一部分：是非題共有 10 小題，每小題 2 分。(對的以“ ”表示，錯的以“X”表示)

(1)~(3)題，題目如下：

設函數 $f(t)$ 的圖如右，則



(1) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$

(2) $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ 在任意 $a \in (-1, 1)$ 都存在

(3) $f'\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

(4) 設 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 為兩數列，則 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 均收斂的充要條件是 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂

(5) 已知 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 三個數列中， $a_n \leq b_n \leq c_n$ 恒成立，則若 $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0+0+\dots+0=0$

(7) 設函數 $f(x) = |x|$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，且 $f'(0) = 0$

(8) 若函數 $f(x)$ 在 $x' = a$ 之處 $f'(a) = 0$ ，則 $y = f(x)$ 圖形在 $x = 0$ 之處連續，且在 $x = 0$ 之處有一條水平切線

(9) 設函數 f 在全體實數集上連續，則 f 在區間 (a, b) 內有實根的充要條件是 $f(a)f(b) = 0$

(10) 設函數 $g \begin{cases} x^2 - 9, & x \neq 3 \\ k, & x = 3 \end{cases}$ ，則 g 在 R 上為連續函數的充要條件是 $k = b$

第二部分：下列各題的極限值或導數若存在則求之，若不存在以不存在表示

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n^4}{n^4+3}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+n}{3^n}$ 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2+x}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ 10. 設 $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ，則 $f'(1)$ 11. 設 $f(x) = x^2 + x + \sqrt{x}$ ，則 $f'(1)$

12. 設 $f(x) = x^3 + |x|^3$ ，則 $f'(0)$

第三部分：每小題 4 分，共計 12 分

設函數 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \end{cases}$ ，試回答下列的問題

(1) 作出 $y = f(x)$ 的圖形 (2) 求以點 $\left(\frac{3}{5}, f\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ 為切點的切線方程式

(3) 求使 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 存在的所有 c ，所形成的集合

第四部分：下列兩題，每題 10 分，共計 20 分，本部分各題，要有演算過程，否則不計分

1. 已知 $-1 < x < 1$ 時， $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ 恒成立

(A) 利用上述不等式，推算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(B) 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，推算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

2. 方程式 $2 \sin x = x$ 除 $x = 0$ 之外，有兩實根，試用勘根定理說明之

北一女中 90 學年度第二學期第一次段考高三數學甲答案

第一部分：是非題，每題 2 分

1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____ 5. _____

6. _____ 7. _____ 8. _____ 9. _____ 10. _____

第二部分：求極限或導數，每題 4 分

1. -3 2. 0 3. 1 4. 不存在 5. -4 6. 不存在

7. 4 8. 8 9. $\frac{1}{3}$ 10. 2 11. $\frac{7}{2}$ 12. 0

第三部分：每小題 4 分

1. 作圖

2. 切線方程式 $3x + 4y = 5$

3. 所有 C 形成的集合 $\{x \mid 0 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$

第四部分：演算題，每題 10 分，必須寫出過程，否則不予計分

1. (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

2. 在 $\left(\frac{p}{6}, p\right)$ 與 $\left(-p, -\frac{p}{6}\right)$ 各區間內都有一實根

