

北一女中八十九學年度第一學期第一次段考高二理組數學科試題

一. 是非題: 每小題 2 分, 共 10 分

- () 1. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 若 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ 則 $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{c}|$ 。
- () 2. 若 $ABCD$ 為一平行四邊形, O 為任意一點, 則向量 $\vec{OA} + \vec{OC}$ 與向量 $\vec{OB} + \vec{OD}$ 相等。
- () 3. 在空間中, 任意相異兩直線一定可找出其公垂線。
- () 4. 平面上不共線的三點 O, A, B 則向量 $\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}$ 為 $\angle AOB$ 之分角線的方向向量。
- () 5. 向量 \vec{a}, \vec{b} 的內積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ 。

二. 選擇題: 每小題 4 分, 共 20 分

- (一) 每邊長為 1 之正六邊形 $ABCDEF$ 且 O 為此正六邊形之外接圓的圓心, 設 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$
- (1) $\vec{OC} =$ (A) $\vec{a} + \vec{b}$ (B) $\vec{a} - \vec{b}$ (C) $\vec{b} - \vec{a}$ (D) $\vec{a} + 2\vec{b}$
- (2) 下列向量的內積中何者為 0? (A) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ (B) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ (C) $\vec{AC} \cdot \vec{BE}$ (D) $\vec{AD} \cdot \vec{CF}$
- (3) 向量內積 $\vec{AC} \cdot \vec{CF} =$ (A) $4\sqrt{3}$ (B) $-4\sqrt{3}$ (C) 12 (D) -3
- (二) (4) 設 $\vec{OA} = (1, 5), \vec{OB} = (5, 1)$ 滿足 $\mathbf{a} \geq 0, \mathbf{b} \geq 0, \mathbf{a} + \mathbf{b} \leq 3$ 且 $\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ 之終點 P 存在範圍的面積 = (A) 24 (B) 36 (C) 72 (D) 108
- (三) (5) 對直線 $L: ax + by = c$ ($a^2 + b^2 \neq 0, a, b, c$ 為整數) 下列何者為正確的? (複選)
- (A) L 斜率 $-\frac{a}{b}$ (B) $\vec{v} = (b, -a)$ 為 L 一方向向量 (C) 直線 $\begin{cases} x = 3 + at \\ y = 8 + bt \end{cases}, t \in R$ 與 L 垂直
- (D) 若 $(3, 8)$ 為 $ax + by = c$ 的一組整數解則其所有解為 $\begin{cases} x = 3 + bt \\ y = 8 - at \end{cases}, t$ 為整數。

三. 填充題 (共 10 小格, 每格 4 分計 40 分)

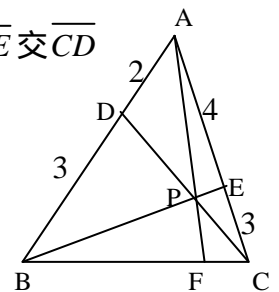
1. 坐標平面上, 以四點 $A(2, -7), B(-3, 0), C(x, y), D(-4, 3)$ 為頂點之平行四邊形 $ABCD$

- (1) C 點坐標為 _____ (2) 向量 \vec{AB} 與 \vec{AD} 的夾角為 q , 則 $\cos q =$ _____
- (3) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積 = _____

2. 如右圖: $\triangle ABC$ 中, 點 D 內分邊 \overline{AB} 成 2:3, 點 E 內分 \overline{AC} 成 4:3, 且 \overline{BE} 交 \overline{CD}

於 P , 連 A, P 延長交 \overline{BC} 於 F , 試求下列:

- (1) 向量 \vec{AP} 以向量 \vec{AB} 及 \vec{AC} 表之, 即 $\vec{AP} =$ _____ $\vec{AB} +$ _____ \vec{AC}
- (2) $\overline{BF} : \overline{FC} =$ _____ (3) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 的面積比 = _____



3. 已知 $A(1,5), B(46,82)$, 直線 \overline{AB} 上的格子點 (x 坐標及 y 坐標均為整數的點) 中與原點 $O(0,0)$

的距離最近的點為 P , 試求: (1) 直線 \overline{AB} 的參數方程式為 _____ (2) 點 P 的坐標是 _____

4. $\triangle ABC$ 中， \overline{BC} 上一點 P ，使 $\overline{BP}:\overline{PC}=1:2$ ，且 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AP}=4$ ， $\overline{AC}=3$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積 = _____

5. 求向量 $\vec{u} = (3,8)$ 在直線 $L: 3x + 4y = 9$ 上的正射影 = _____

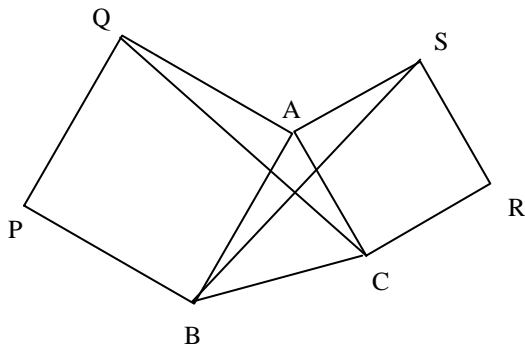
四、計算證明題:30%

1. 對於任意凸四邊形，若兩對角線長平方和恰等於四邊長的平方和，試證明此四邊形必為一平行四邊形。

2. 空間中三線段 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 兩兩互相垂直，自 O 作平面 ABC 的垂線，令垂足為 H ，證明：

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

3. 在下面的平面圖形中，四邊形 $ABPQ$ 與 $ACRS$ 都是正方形，求證向量 \vec{BS} 與 \vec{CQ} 垂直。



北一女中八十九學年度第一學期第一次段考高二理組數學科答案

一、是非題:每小題 2 分, 共 10 分

1	2	3	4	5
O	O	O	O	O

二、選擇題: 每小題 4 分, 共 20 分

1	2	3	4	5
C	C	D	D	ABC

三.填充題 (共 10 小格, 每格 4 分計 40 分)

1(1)	1(2)	1(3)	2(1)	2(2)
$(-9, 10)$	$\frac{25}{\sqrt{629}}$	8	$\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$	2:1
2(3)	3(1)	3(2)	4	5
35:8	$\begin{cases} x=1+45t \\ y=5+77t \end{cases}$	(1, 5)	$\frac{5\sqrt{95}}{8}$	$(-\frac{48}{25}, \frac{36}{25})$

四、計算證明題:30%

1.

2.

3.