一、多重選擇題（共 30 分）
（每題至少有一個選項是對的，每個選項 2 分，答錯不倒扣，全題未作答則不計分）

1. 已知 A、B、C 為 n 階方陣，且 I 為 n 階單位方陣、O 為 n×n 的零矩陣、X 為 n×1 的行矩陣。
關於矩陣的敘述，請問下列選項何者為真？
(A) AB 與 BA 必不相等。  （B) 若 A = BC，則 A^2 = B^2C^2。
(C) (A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I。  （D) 若 AX = X，則 A = I。
(E) 若 A^2 = 3A，則 A = O 或 3I。

2. 已知 k ∈ ℝ，對於方程組

\[
\begin{align*}
\begin{cases}
    kx + y + z = 1 \\
x + ky - z = k - 1,
\end{cases}
\end{align*}
\]

小綠已計算出其 Δ = (k + 1)^2(k - 2)，

則下列哪些選項可能是此方程組的幾何意義？
(A) 三平面平行。  （B) 三相異平面交於一直線。
(C) 三相異平面兩兩交於一直線，且三交線平行。
(D) 兩平面平行，且與第三平面各交於一直線。  （E) 三平面交於一點。

3. 已知點 A(3,4,3) 及 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 都在平面 E: x + y + z = 10 上，且直線 L: \[
\begin{cases}
x = \frac{y - 3}{2} \\
z = \frac{y - 5}{-3}
\end{cases}
\]

也落在平面 E 上，則下列哪些在平面 E 上的點，與點 A 在 L 的同一側？
(A) P_1(7,2,1)  （B) P_2(1,2,7)  （C) P_3(2,7,1)
(D) P_4(0,10,0)  （E) P_5(0,0,10)

二、填充題（每格 5 分，共 50 分。）

1. 已知矩陣 A、B 滿足 A + B = \[
\begin{bmatrix}
2 & 5 \\
2 & 8
\end{bmatrix}
\]

3A - 2B = \[
\begin{bmatrix}
6 & -10 \\
1 & 9
\end{bmatrix}
\]

則 A = (A)。
2. 若直線 \( L_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+6}{-5} = \frac{z-6}{-2} \) 與直線 \( L_2: \frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-k}{4} \) 交於一點 \( P \)，則
   
   (1) \( P \) 點的座標為____(B)____。
   (2) \( k = ____(C)____。 

3. 若直線 \( L: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-3}{-2} \) 落在平面 \( E: 5x + y + bz = 21 \) 上，則數對 \((a, b) = ____(D)____。 

4. 已知 \( A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \)，則：
   
   (1) \( AB - BA = ____(E)____。 
   (2) \( A^3 + 2(A^2 + ABA + BA^2) + 4(AB^2 + BAB + B^2 A) + 8B^3 = ____(F)____。 

5. 如右圖，已知 \( ABCD-EFGH \) 為一長方體，
   
   其中 \( AB = 2, AE = 1, AD = 5 \)。
   
   則直線 \( AF \) 與直線 \( BG \) 的距離為____(G)____。  

6. 已知空間中兩點 \( A(5, -1, 3) \) 與 \( B(3, -1, 4) \) 都落在平面 \( E \) 上。
   
   若 \( P(2, 1, 5) \) 與 \( Q(2, -7, 1) \) 到平面 \( E \) 的距離相等，
   
   則平面 \( E \) 的方程式為：____(H)____、____(I)____。(兩解) 

7. 若 \( \vec{a} \) 在 \( \vec{u} \) 上的正射影為 \((3, 3, 3) \)、\( \vec{a} \) 在 \( \vec{v} \) 上的正射影為 \((\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}) \)、\( \vec{a} \) 在 \( \vec{w} \) 上的正射影為 \((3, 0, 4) \)，
   
   則 \( \vec{a} = ____(J)____。 (請填入 \( \vec{a} \) 的坐標) 

三、計算證明題（共 20 分，請務必表現出「高中生應有的論證層次與書寫表達能力」。）

1. 若對於方程組 \( \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 2 \end{cases} \)，有 \( \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \)，請證明：\( \Delta = 0 \)。(5 分) 

2. 已知 \( a \in \mathbb{R} \)，請就 \( a \) 值討論方程組 \( \begin{cases} (a-2)x + y - 5z = 0 \\ -2x + (a+1)y - 5z = 1 \\ -2x + y + (a-5)z = 2 \end{cases} \) 的解及其幾何意義，
   
   若有解需寫出其解。(15 分)
台北市立第一女子高級中學 103 學年度 第二學期
高二理組數學科第二次段考

班級：二年______班 座號：_______ 姓名：________________

答案卷

一、多選題 (30分，每個選項2分，答錯不倒扣，全題未作答則不計分。)

<table>
<thead>
<tr>
<th>1</th>
<th>2</th>
<th>3</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>(C)</td>
<td>(A)(C)(E)</td>
<td>(B)(E)</td>
</tr>
</tbody>
</table>

二、填充題（每格5分）

(A) (B) (C) (D) (E)

| 2 0 | (3,-1,8) | 0 | (3,4) | [0 0] |
| 1 5 |          |   |       | [0 0] |

(F) (G) (H) (I) (J)

| 343 0 | 10/129 √129 | 2x - 3y + 4z = 25 | x - y + 2z = 12 | (3,2,4) |
| 0 343 |           |                |               |

三、計算證明題（共20分，請務必表現出“高中生應有的論證層次與書寫表達能力”）。

1. （5分）
反證法：
假設$\Delta \neq 0$，則$(x, y, z) = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) = (0,0,0)$為方程組的唯一解，但代入方程組顯然不合。
故必有$\Delta = 0$。

2. （15分）
$\Delta = a^2(a - 6)$
$\Delta_x = 9a$
$\Delta_y = a(a + 3)$
$\Delta_z = a(2a - 3)$

Case 1. 當$a = 0$時，方程組無解，幾何意義：三平面平行。
Case 2. 當$a = 6$時，方程組無解，幾何意義：三相異平面兩兩交於一直線，且三交線平行。
Case 3. 當$a \neq 0, 6$時，方程組有唯一解$(x, y, z) = (\frac{9}{a(a-6)}, \frac{a+3}{a(a-6)}, \frac{2a-3}{a(a-6)})$，
幾何意義：三平面交於一點。