Unit 2：布林代數與邏輯電路

Section 1: 布林代數

- 基本定理

(1) 單一律(Law of Tautology)

$A \cdot A = A$

$A \cdot 1 = A$

$A \cdot 0 = 0$

$A + 0 = A$

$A + 1 = 1$

$A + A = A$

(2) 交換律(Commutative Law)

$A \cdot B = B \cdot A$

$A + B = B + A$

(3) 結合律(Associative Law)

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(4) 分配律(Distributive Law)

$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

(5) 補數(Complement)

$A = \overline{\overline{A}}$

$A + \overline{A} = 1$

$A \cdot \overline{A} = 0$

(6) 第摩根定理(DeMorgan's Theorem)

$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

- 真值表

A	B	A・B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Section 2: 基本邏輯電路

- 邏輯電路分類

1. 組合邏輯電路:
2. 基本邏輯閘
3. 半加器
4. 全加器
5. 比較器
6. 解碼器
7. 編碼器
8. 多工器

- 基本邏輯閘

AND gate
OR gate
NOT gate
NAND gate=(NOT AND gate)
NOR gate=(NOT OR gate)
XOR gate=(Exclusive OR gate)
XNOR gate=(Exclusive NOR gate)

- 半加器(Half Adder, HA):能處理 2 個 bit 的相加

A	B	Carry	sum
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

CARRY = AB

SUM = $\overline{A}B + AB = \overline{A} \oplus B$

線路圖:

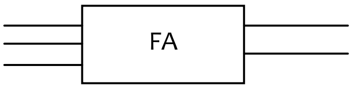
- 全加器

能處理 3 個 bit 的相加

A	B	C	Carry	Sum
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$\text{Carry}=(A \oplus B)\,C + AB$

$\text{Sum}=(A \oplus B) \oplus C$



資料來源：http://www.ltivs.ilc.edu.tw/kocp/logic/ch3/3-4.htm

Section 3:布林代數的基本定理與定律

■ 基本定理

定理(1) X・0 = 0

說明：AND 的運算，在變數條件均為 1 時結果方為 1 ，此定理中的一個變數已經固定為 0，所以不管 X 為 1 或 0 其結果必為 0。

定理(2) X・1 = X

說明：AND 的運算，在變數條件均為 1 時結果方為 1 ，此定理中的一個變數已經固定為 1，若 X 為 1 則結果為 1，若 X 為 0 則結果為 0，所以 X・1 = X。

定理(3) X・X = X

說明：AND 的運算，在變數條件均為 1 時結果方為 1 ，若 X 為 1 則 1・1 = 1，若 X 為 0 則 0・0 =0，所以 X・X = X。

定理(4) X・X'= 0

說明：AND 的運算，在變數條件均為 1 時結果方為 1 ，而 X 與 X'總是相反的，亦即 1・0 = 0 或 0・1 =0，所以 X・X'= 0。

定理(5) X + 0 = X

說明：OR 的運算，在變數條件任何一者為 1 時結果為 1 ，若 X 為 1 則 1+0 = 1，若 X 為 0 則 0 + 0 =0，所以 X + 0 = X。

定理(6) X + 1 = 1

說明：OR 的運算，在變數條件任何一者為 1 時結果為 1 ，此定理中的一個變數已經固定為 1，所以 X+1 = 1。

定理(7) X + X = X

說明：OR 的運算，在變數條件任何一者為 1 時結果為 1 ，若 X 為 1 則 1+1 = 1，若 X 為 0 則 0 + 0 =0，所以 X + X = X。

定理(8) X + X’= 1

說明：OR 的運算，在變數條件任何一者為 1 時結果為 1 ，而 X 與 X’總是相反的，亦即 1 + 0 = 1 或 0 + 1 = 1，所以 X + X’= 1。

布林代數除了以上的定理可以作為運算時的法則之外，在多變數的運算式中尚有一些定律可以運用

■ 基本定律

定律(1) 交換律：

a. X+Y = Y+X

b. X・Y = Y・X

定律(2) 結合律：

a. (X+Y)+Z＝X+(Y+Z)

b. (X・Y)・Z＝X・(Y・Z)

定律(3) 分配律：

a. X・(Y+Z)＝XY+XZ

b. X+(Y・Z)＝(X+Y)・(X+Z)

c. (W+X)・(Y+Z)＝WY+WZ+XY+XZ

定律(4) 吸收律：

a. X+XY＝X

b. X+X’Y＝X+Y

証明：X+XY＝X

X+XY＝X(1+Y) (分配律)

＝X・1 (∵1+Y＝1)

＝X

証明：X+X’Y＝X+Y

X+X’Y＝X (1+Y) +X’Y (∵1+Y＝1)

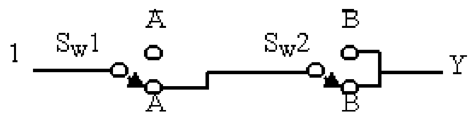
＝X+XY+X’Y (分配律)

＝X+ (X+X’)Y (分配律)

＝X+Y (∵X+X’＝1)

Section 4: 布林代數的化簡

布林代數式可以描述一件事成功的途徑及條件，例如圖 3.4-1 中欲使 Y=1 的途徑有兩條，一條為開關 SW1 的 A 及 SW2 的 B 均接通，另一條為開關 SW1 的 A 及 SW2 的 B'均接通，布林代數式就為 Y=AB+AB'，但是我們發現只要開關 SW1 的 A 接通時，無論開關 SW2 在 B 或 B'的位置，Y 均等於 1，所以 Y=AB+AB'=A 是絕對成立的，這種代數式的簡化可以更清楚的知道事件成功的關鍵，減少了考慮的項目或變數。因此布林代數的化簡(simplification)是為了消除不必考慮的項或變數，化簡後邏輯結果不變。



(圖 3.4-1)Y=AB+A$\overline{\text{B}}$ 開關示意圖

■ **利用定理定律化簡**

例 3.4-1-1

試化簡 Y =ABC+AB'C+ABC'+AB'C'

Y = AC(B+B')+ AC'(B+B') (∵分配律)

= AC+AC' (∵B+B'＝1)

= A(C+C') (∵分配律)

= A (∵C+C'＝1)

例 3.4-1-2

試化簡 Y=AB'C+A'B'C+BC

Y= AB'C+A'B'C+BC

= B'C(A+A')+BC

= B'C + BC

= C(B'+B)

= C

例 3.4-1-3

試化簡 $Y = A(B+C)A'+D$

$Y = (AB+AC)A'+D$

$= (A'AB+A'AC)+D$

$= (0+0)+D$ ($\because A'A=0$，$0+0=0$)

$= D$

例 3.4-1-4

試化簡 $Y = A + A' + B$

$Y = A + A' + B$

$= (A + A') + B$ (結合律)

$= 1 + B$ ($\because A+A'=1$)

$= 1$

例 3.4-1-5

試化簡 $Y = AB'+ABC+A'B'C'$

$Y = AB'C+AB'C'+ABC+A'B'C'$ ($\because AB'=AB'(C+C')$)

$= AB'C+ABC+AB'C'+A'B'C'$ (交換律)

$= AC(B+B')+B'C'(A+A')$

$= AC+B'C'$

例 3.4-1-6

試化簡 $Y = AB+A'BC$

$Y = B(A+A'C)$

$= B(A+C)$ (吸收律)

$= AB+BC$ (分配律)

或 $Y = AB+A'BC$

$= ABC+ABC'+A'BC$ ($\because AB=AB(C+C')'$)

$= ABC+ABC'+ABC+A'BC$ ($\because ABC=ABC+ABC$)

$= AB+BC$

■　利用卡諾圖化簡

卡諾圖(**Karnaugh map**)是化簡布林代數式的工具圖，它利用了 A+A'=1 的原理將相鄰的兩項得以消除，快速的得到最簡的布林代數式，化簡的方法請跟著例題學習。

例 3.4-2-1　試化簡 Y =AB+A'B

步驟 1　：繪出兩個變數的卡諾圖

	B'	B
A'		
A		

步驟 2　：將 Y 為 1 的項目先填入卡諾圖，其餘填 0。

本例 Y =AB+A'B 中有兩項，AB 或 A'B 均可令 Y=1

故卡諾圖應為：

	B'	B
A'	0	1
A	0	1

A'B=1

AB=1

步驟 3　：將相鄰為 1 的項圈起來。

(注意：所圈之項 N 的多少除了必須是相鄰為 1 的項之外，還必須滿足 N=2n，n 為正整數，例如 2、4、8、16 個)

	B'	B
A'	0	1
A	0	1

爲 1 的項 N=2
滿足 N=2=2^1

步驟 4：圈起來的項有互補變數者視為可消除之變數，再重新列出布林代數式。

本例中 A 與 A'互補，亦即 Y =AB+A'B=B(A+A')=B，所以今後卡諾圖中相鄰且互補的的變數可以得以消除，因此本例 Y=B 即為化簡結果。

(注意：圈中有兩個"1"，必然可以消去一個變數。)

例 3.4-2-2　試化簡 Y = AB'C+A'B'C+BC

步驟 1 繪出三個變數的卡諾圖

(注意：B'C'、B'C、BC、BC'的排列順序，而非 B'C'、B'C、BC'、BC，這是為了相鄰的項均有互為補數的變數以利消除化簡。)

	B'C'	B'C	BC	BC'
A'				
A				

步驟 2 將 Y 為 1 的項目先填入卡諾圖，其餘填 0。

因為 Y =AB'C+A'B'C+BC

= AB'C+A'B'C+ABC+A'BC

所以卡諾圖為：

	B'C'	B'C	BC	BC'
A'	0	1	1	0
A	0	1	1	0

步驟 3：將相鄰為 1 的項(N)圈起來，且 N=4 滿足=2n，n 為正整數 2。

	B'C'	B'C	BC	BC'
A'	0	1	1	0
A	0	1	1	0

爲 1 的項 N=4
滿足 $N=4=2^2$

步驟 4：圈起來的項有互補變數者視為被消除之變數，再重新列出布林代數式。

本例中 A 與 A'互補、B 與 B'互補，所以 Y=C 即為化簡結果。

(注意：圈中有四個"1"，必然可以消去兩個變數。)

例 3.4-2-3 試化簡 Y = A'B' + AB'C'D'+ AB'CD'

步驟 1 繪出四個變數的卡諾圖

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'				
A'B				
AB				
AB'				

步驟 2 將 Y 為 1 的項目先填入卡諾圖，其餘填 0。

因為 A'B'=A'B'C+A'B'C'

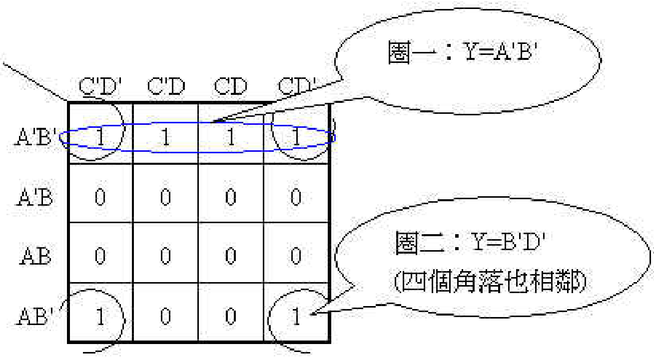
=A'B'CD+A'B'CD'+A'B'C'D+A'B'C'D'

所以 Y = A'B'CD+A'B'CD'+A'B'C'D+A'B'C'D'+ AB'C'D'+ AB'CD'

則卡諾圖為：

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	1	1
A'B	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
AB'	1	0	0	1

步驟 3 將相鄰為 1 的項圈起來。



步驟 4 圈起來的項有互補變數者視為被消除之變數，再重新列出布林代數式。

圈一中 C'D'+C'D 可消去 D，C'D+CD 可消去 C'，CD+CD'可消去 D，CD'+C'D'可消去 C，化簡後剩下 A'B'。

圈二中直的看 A'B'+AB'消去 A 剩下 B'，橫的看 C'D'+CD'消去 C 剩下 D'，此圈化簡後為

B'D'。

故 Y= A'B'+ B'D' (注意：有幾個圈，化簡後的布林代數式就有幾個項，本例中有兩個圈，所以有 A'B'及 B'D'兩項。)

例 3.4-2-4

試用卡諾圖化簡真值表的輸出布林代數式。

由於真值表已經直接列舉了爲 1 的輸出項，所以直接將 7 個爲 1 的輸出項爲 1 的輸出項填入卡諾圖化簡即可。

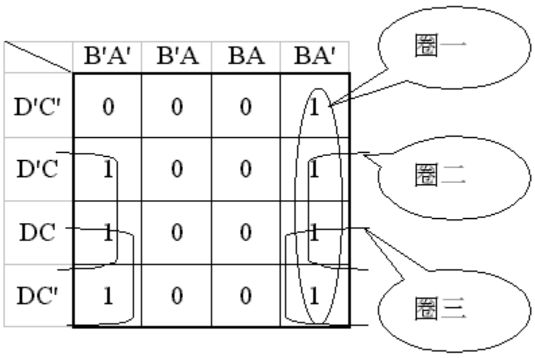
(注意：真值表內的變數排列爲 DCBA，卡諾圖的排列左邊的變數就放 DC，上方則爲 BA，而非 AB、CD，這樣的安排比較容易比對真值表的項。)

Y=1 的項包括：

D'C'BA'
D'CB'A'
D'CBA'
DC'B'A'
DC'BA'
DCB'A'

D	C	B	A	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

將為 1 的項填入卡諾圖後化簡：



圈一：Y=BA' 圈二：Y=CA' 圈三：Y=DA'

故化簡前有 7 個為 1 的輸出項，化簡後為 Y=BA'+CA'+DA' ，僅有 3 個項而且每個項中的變數都減少了兩個。