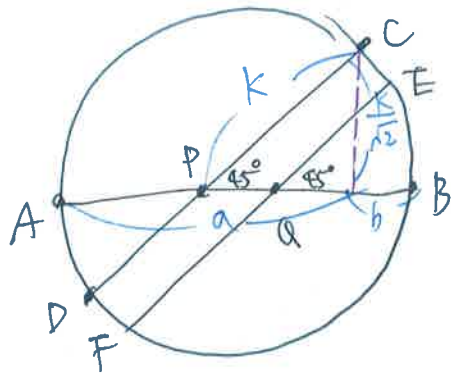


北一女中 105 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 二年級 班 座號： 14 號 姓名： 林奕帆



題號： 6-5 頁碼/總頁數： _____ (如果只有一頁，可不填)
 (請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)



① 令 $\overline{PC} = k$

②
$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab = \frac{1}{2}k^2 \end{cases}$$
 (by 母+子相乘)
 由 $\frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} = b$

$$\Rightarrow b = \frac{2 - \sqrt{4 - 2k^2}}{2} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{2 + \sqrt{4 - 2k^2} - \sqrt{2}k}{2}, \overline{BP} = \frac{2 - \sqrt{4 - 2k^2} + \sqrt{2}k}{2}$$

③ 圓幂： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} \Rightarrow \overline{PD} = \frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{PC}} = \sqrt{2 - k^2}$

④ 同理，令 $\overline{OE} = l$ ，則 $\overline{OF} = \sqrt{2 - l^2}$

所求： $\overline{PC} \times \overline{QE} + \overline{PD} \times \overline{QF} = kl + \sqrt{(2 - k^2)(2 - l^2)}$

⑤ by 柯西 $\sqrt{(2 - k^2)(2 - l^2)} < \frac{(2 - k^2) + (2 - l^2)}{2}$

$$\Rightarrow \text{所求} < kl + \frac{(2 - k^2) + (2 - l^2)}{2} \geq 2 + \left[kl - \left(\frac{k^2 + l^2}{2} \right) \right] < 2$$
 (故得證)

⑥ 由柯西 $\sqrt{k^2 l^2} < \frac{k^2 + l^2}{2} \Rightarrow kl - \frac{k^2 + l^2}{2} < 0$