

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 二年書班 座號： 36 號 姓名： 趙姿雅

題號： 6-2 頁碼/總頁數： _____ (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$5^{(2^{2016})} - 1 = [5^{(2^{2015})} - 1][5^{(2^{2015})} + 1]$$

$$= [5^{(2^{2015})} + 1][5^{(2^{2014})} + 1] \cdots [5^{(2^2)} + 1][5^{(2^1)} + 1][5^{(2^0)} + 1][5^{(2^0)} - 1]$$

證明 $5^{(2^a)}$ 末 2 位數為 25 ($a \in \mathbb{N}$)

1° 當 $a=1$ 時, $5^{(2^1)} = 25$ (合)

2° 令 $a=k$ 時, $5^{(2^k)} = 100t + 25$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$ 或 0

3° 當 $a=k+1$ 時, $5^{(2^{k+1})} = [5^{(2^k)}]^2 = (100t + 25)^2 = 10000t^2 + 625 + 5000t = 100(100t^2 + 50t + 6) + 25$

由數學歸納法得證

故 $5^{(2^a)} + 1$ 末 2 位數為 26

又 $26 \div 2 = 13$, 13 為奇數, 無法再被 2 整除,

$\therefore 5^{(2^a)} + 1$ 至多只能提出 1 個 2

$$[5^{(2^{2015})} + 1][5^{(2^{2014})} + 1] \cdots [5^{(2^1)} + 1][5^{(2^0)} + 1][5^{(2^0)} - 1]$$

$$= (2^{2015}) \times p \times 6 \times 4, \quad p \text{ 無法被 2 整除}$$

$$= (2^{2018}) \times p \times 3$$

Ans: 最大的正整數 $n = 2018$