

北一女中 102 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：三年讓班 座號：02 號 姓名：鄭乃賢

題號：5-3 頁碼/總頁數：4/7 (如果只有一頁，可不填)

對於任意給定的 54 個相異正整數，證明其中必存在 a, b, c, d 四個相異正整數，滿足 $(a-b)(c-d)$ 為 2014 的倍數。

$$2014 = 2 \times 19 \times 53 = 53 \times 38$$

對於任意給定的 54 個相異正整數 $\{a_1, a_2, \dots, a_{54}\}$

必有 $a_k \pmod{53} = a_j \pmod{53}$ (鴿籠原理)

$$\text{令 } a_k > a_j, a_k = a, a_j = b$$

則 $(a-b)$ 為 53 的倍數 — ①

在 54 個相異正整數中拿掉一組 $a_k \pmod{53} = a_j \pmod{53}$ ，

剩下 52 個相異正整數，

必有 $a_n \pmod{38} = a_m \pmod{38}$ (鴿籠原理)

$$\text{令 } a_n > a_m, a_n = c, a_m = d$$

則 $(c-d)$ 為 38 的倍數 — ②

由 ①、② 知

$(a-b)(c-d)$ 為 2014 的倍數。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 2014} \\ 19 \overline{) 1007} \\ 53 \end{array}$$