

# 北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：      年 良 班 座號：3.7.29 號 姓名：呂承樺、林育瑩、劉若倫

題號：5-2 頁碼/總頁數：         (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

Claim: 對於所有正整數  $k$ ，都存在一個  $k$  位  $N$ ，使得  $N$  是  $2^k$  的倍數，且  $N$  的每一位數皆為 1 或 2、  
正整數

Pf. 1° 當  $k=1$  時，

有  $2 \mid 2 \Rightarrow$  成立

2° 假設  $k=n$  時成立

即存在  $N_n$  使得  $2^n \mid N_n$ ，且  $N_n$  的每一位數皆為 1 或 2， $N_n$  為  $n$  位數

3° 當  $k=n+1$  時，

令  $N_n = 2^n \times m$  ( $2^n \mid N_n$ )

若  $m$  為奇，則有  $10^n + N_n = 2^n(5^n + m) = 2^n \times \frac{5^n + m}{2}$ ，此時  $\frac{5^n + m}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^{n+1} \mid 10^n + N_n$ ，且  $10^n + N_n$  的每一位數皆為 1 或 2， $10^n + N_n$  為  $n+1$  位數

若  $m$  為偶，則有  $2 \times 10^n + N_n = 2^n(2 \times 5^n + m) = 2^n \times (5^n + \frac{m}{2})$ ，此時  $5^n + \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^{n+1} \mid 2 \times 10^n + N_n$ ，且  $2 \times 10^n + N_n$  的每一位數皆為 1 或 2， $2 \times 10^n + N_n$  為  $n+1$  位數

$\therefore k=n+1$  時亦成立

$\therefore$  由數學歸納法知，Claim 成立

Pf. 由 Claim 知，本題顯然成立  $\ast$