

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 溫 班 座號： 26 號 姓名： 蔡欣好

題號： 5-2 頁碼/總頁數： 1,2 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

① <觀察> 令 $2^k = m$

* 2^k 的倍數判別法：末 k 位是 2^k 的倍數

(1) $k=1, m=2$

⇒ N 可為 2

(2) $k=2, m=4$

⇒ N 可為 12

(3) $k=3, m=8$

⇒ N 可為 112

② 猜測：if $2^k \mid r$, 則 TR 或 $2R$ 其中一個必為 2^{k+1} 的倍數

• TR 表示：若 r 為 n 位數，則在 r 的最高位前加上數字 1，使其成為 $(n+1)$ 位數。如：if $r = 235$, then $TR = 1235$ 。

$2R$ 亦如是。

③ pf > 設 $r = 2^k \times m$, r 為全由 1, 2 組成的 k 位數

$$TR = \underbrace{10 \dots 0}_{k \text{ 個 } 0} + r = 2^k \times 5^k + 2^k \times m = 2^k (5^k + m)$$

$$2R = \underbrace{20 \dots 0}_{k \text{ 個 } 0} + r = 2 \times (2^k \times 5^k) + 2^k \times m = 2^k (2 \times 5^k + m)$$

(1) 若 m 為奇數，則 $5^k + m$ 為偶數 ($\because 5^k$ 為奇數, m 為奇數)

設 $5^k + m = 2q$

則 $TR = 2^k (5^k + m) = 2^k \times 2q = 2^{k+1} \times q$ 為 2^{k+1} 的倍數

(2) 若 m 為偶數，則 $2 \times 5^k + m$ 為偶數 ($\because 2 \times 5^k$ 為偶數, m 為偶數)

設 $2 \times 5^k + m = 2p$

則 $2R = 2^k (2 \times 5^k + m) = 2^k \times 2p = 2^{k+1} \times p$ 為 2^{k+1} 的倍數

\therefore 無論 m 之奇偶性，只要為正整數，則 TR 或 $2R$ 其中之一必為 2^{k+1} 的倍數

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 溫 班 座號： 26 號 姓名： 蔡欣妤

題號： 5-2 頁碼/總頁數： 13 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

④ 因此，可知：

(1) 當 $k=1$

$\Rightarrow N=2$, $2^k | N$ 成立

(2) 設 $k=m$ 時，

$2^m | N'$ 成立

(3) 則 $k=m+1$ 時，

由③之證明可知，

$2^{m+1} | N''$ 亦成立

故可知對於所有正整數 k ，都存在正整數 N ，使 $2^k | N$