北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 誠 班　座號：33.39 號　姓名：蔣馨慧、譚書旻

10

題號：4-6　　頁碼／總頁數：______（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

① $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+a^2b^2+1}$

$\because$ a、b 皆為正數，由算幾不等式可知 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq 1$

故當 $a^2b^2=(ab)^2=1$ 時，$\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+a^2b^2+1}$ 有最小值 $\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+1+1}=1$

$\therefore 1\leq\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}$

② 令 $a=1-k$，$b=1+k$，且 $|k|\leq 1$

則 $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{1}{1+(1-k)^2}+\frac{1}{1+(1+k)^2}=\frac{2k^2+4}{k^4+4}$

假設：$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2k^2+4}{k^4+4}\geq\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ 化簡後可得 $(1+\sqrt{2})k^4-4k^2+(4\sqrt{2}-4)\leq 0$

利用公式解可將上式改寫為 $\left(k^2-(2\sqrt{2}-2)\right)^2$ 必定 ≥ 0

故原假設不合

$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 1\leq\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 得證

且當 $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 時，$k=\pm\left(\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$

$\Rightarrow$ 1. $k=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ 時，$a=1-\sqrt{2\sqrt{2}-2}$，$b=1+\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

2. $k=-\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ 時，$a=1+\sqrt{2\sqrt{2}-2}$，$b=1-\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

$\Rightarrow (a,b)=\left(1-\sqrt{2\sqrt{2}-2},\ 1+\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$

or $\left(1+\sqrt{2\sqrt{2}-2},\ 1-\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$ #