北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 溫 班　座號：9 號　姓名：洪琍熙

題號：6.　頁碼／總頁數：5/5（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

10

設 $\sum_{k=1}^{2^n} a(k) = b(n)$

觀察 $b(n)$　$b(0) = a(1) = 1$

$b(1) = a(1) + a(2) = 1 + \frac{2}{2} = 1+1 = 2$

$b(2) = a(1) + a(2) + a(3) + a(4) = 1 + \frac{2}{2} + 3 + \frac{4}{4} = 1+1+3+1 = 6$

$b(3) = a(1) + a(2) + a(3) + a(4) + a(5) + a(6) + a(7) + a(8)$

$= 1 + \frac{2}{2} + 3 + \frac{4}{4} + 5 + \frac{6}{2} + 7 + \frac{8}{8} = 22$

可知若 k 為奇數，則 $a(k) = k$

若 k 為偶數，且 $k = 2^r \cdot t$ ($r \in z^+$，t 為奇數)，則 $a(k) = t = a(2^s \cdot t)$ $(0 \le s \le r)$

$b(n) = \sum_{k=1}^{2^n} a(k) = a(1) + a(2) + a(3) \cdots a(2^n)$

$= \begin{cases} 奇: a(1) + a(3) + a(5) \cdots a(2^n - 1) \\ 偶: a(2) + a(4) + a(6) + a(8) \cdots a(2^n) \end{cases}$ 相加

$= \begin{cases} 奇: 1 + 3 + 5 \cdots + 2^n - 1 = \frac{(1 + 2^n - 1)\frac{2^n}{2}}{2} = 2^{2n-2} = 4^{n-1} \\ 偶: a(1) + a(2) + a(3) + a(4) \cdots a(\cancel{n-1}) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a(k) = b(n-1) \end{cases}$ 相加

2^{n-1}

則 $b(n) = b(n-1) + 4^{n-1}$

同理 $b(n-1) = b(n-2) + 4^{n-2}$

$\vdots$

$b(1) = b(0) + 4^0$

$+)\ b(0) = 1$

$b(n) = \underbrace{4^{n-1} + 4^{n-2} \cdots 4^0}_{等比數列，公比4，n項} + 1$

$= \frac{4^0(4^n - 1)}{(4-1)} + 1 = \frac{4^n - 1}{3} + 1 = \frac{4^n + 2}{3}$ # 故得證