

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：一年溫班 座號：26 號 姓名：蔡欣婷



題號：4-6 頁碼/總頁數：18 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

*利用數學歸納法證明

① 當 $n=1$ 時

$$\sum_{k=1}^1 a(k) = a(1) + a(2) = 1+1 = 2 = \frac{1^1+2}{3} \text{ 成立}$$

② 設當 $n=t$ 時

$$\sum_{k=1}^t a(k) = a(1) + a(2) + \dots + a(2^t) = \frac{1^t+2}{3} \text{ 成立}$$

③ 則當 $n=t+1$ 時

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{t+1} a(k) &= [a(1) + a(2) + \dots + a(2^t)] + a(2^t+1) + a(2^t+2) + \dots + a(2^{t+1}) \\ &= \frac{1^t+2}{3} + a(2^t+1) + a(2^t+2) + \dots + a(2^{t+1}) \end{aligned}$$

*討論 $a(2^t+1) + a(2^t+2) + \dots + a(2^{t+1})$ 之值

設 $2^t+1 \sim 2^{t+1}$ 中，有 2 個數函數值 $a(x)$ 相同

\Rightarrow 則兩數必差 2^n 倍 ($n \in \mathbb{N}$)

(\because 若此兩數為 a, b)

令 $a = 2^r \times (\text{剩下質因數乘積})$ ，代稱為 l

$b = 2^s \times (\text{剩下質因數乘積})$ ，代稱為 m

$\therefore a(a) = a(b)$

$\therefore l = m$

\Rightarrow 即 a, b 差 2 的次方倍

設此兩數較小者為 x

$$\therefore 2^t+1 \leq x \leq 2^{t+1}$$

$$\Rightarrow 2(2^t+1) = 2^{t+1}+2 \leq 2x \leq 2 \times 2^{t+1} = 2^{t+2}$$

但此時 $2x$ 不在 $2^t+1 \sim 2^{t+1}$ 範圍內

\Rightarrow 矛盾 *

故 $2^t+1 \sim 2^{t+1}$ 中所有數函數值 $a(x)$ 皆不同

又，此範圍共 $2^{t+1} - (2^t+1) + 1 = 2^t$ 個數

小於 2^{t+1} 的奇數共 $\frac{2^{t+1}}{2} - 2^t$ 個

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 溫 班 座號： 26 號 姓名： 蔡欣婷

題號： 4-6 頁碼/總頁數： p.9 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

且每個數所對應之函數值 $a(x)$ 皆不同

⇒ 故， $2^t+1 \sim 2^{t+1}$ 共 2^t 個數之函數值 $a(x)$ ，必

與 $1 \sim 2^{t+1}$ 中共 2^t 個奇數一一對應

$$\begin{aligned} \therefore a(2^t+1) + a(2^t+2) + \dots + a(2^{t+1}) &= 1+3+5+\dots+(2^{t+1}-1) \\ &= \frac{1+(2^{t+1}-1)}{2} \times 2^t = 2^{2t} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2^{t+1}} a(k) = \frac{4^t+2}{3} + [a(2^t+1) + a(2^t+2) + \dots + a(2^{t+1})]$$

$$= \frac{4^t+2}{3} + 2^{2t}$$

$$= \frac{4^t+2+3 \times 4^t}{3}$$

$$= \frac{4^{t+1}+2}{3} \quad \text{亦成立}$$

故依據數學歸納法得證 $\sum_{k=1}^n a(k) = \frac{4^n+2}{3}$ 且