

# 北一女中 105 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二年溫班 座號：25 號 姓名：蔡欣妤

題號：4-4 頁碼/總頁數：\_\_\_\_\_ (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$\textcircled{1} \because x > 1, y > 1$$

$$\Rightarrow xy > 1$$

$$\Rightarrow \log(xy) > 0$$

$$\therefore \log(xy) \leq (\log k) \cdot \sqrt{(\log x)^2 + (\log y)^2}$$

$$\Leftrightarrow [\log(xy)]^2 \leq (\log k)^2 \cdot [(\log x)^2 + (\log y)^2]$$

② 由柯西不等式可知：

$$[(\log x)^2 + (\log y)^2][1^2 + 1^2] \geq [\log x + \log y]^2$$

$$\Leftrightarrow [(\log x)^2 + (\log y)^2] \times 2 \geq (\log xy)^2$$

又，當  $\frac{\log x}{1} = \frac{\log y}{1}$  時，

$$[(\log x)^2 + (\log y)^2] \times 2 = (\log xy)^2$$

③ 由 ② 可知，when  $\frac{\log x}{1} = \frac{\log y}{1}$  時， $(\log k)^2 = 2$ ，

when  $\frac{\log x}{1} \neq \frac{\log y}{1}$  時， $(\log k)^2 > 2$

$$\therefore (\log k)^2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \log k \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k \text{ 最小值為 } 10^{\sqrt{2}}$$

$$A = 10^{\sqrt{2}}$$