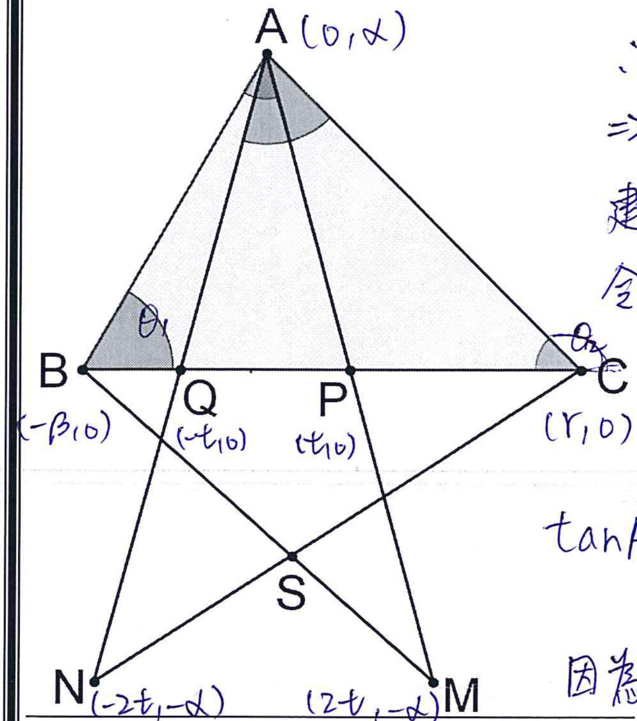
北一女中 103 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：三年義班　座號：15號　姓名：柯宜妤

10

題號：3-6　頁碼／總頁數：＿＿＿＿（如果只有一頁，可不填）



$\because \angle PAB=\angle BCA,\ \angle CAQ=\angle ABC$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PBA \sim \triangle QAC$

$\Rightarrow \angle APB=\angle AQC=\angle BAC \Rightarrow \triangle APQ$ 為等腰 $\triangle$

建立坐標，以 $\overleftrightarrow{BC}$ 為 x 軸，A 在 y 軸正向

令 $A(0,\alpha)$、$B(-\beta,0)$、$C(r,0)$、$\alpha,\beta,r>0$

$\angle ABC=\theta_1$，$\angle ACB$ 的外角 $=\theta_2$

則 $\tan\theta_1=\frac{\alpha}{\beta}$，$\tan\theta_2=\frac{-\alpha}{r}$

$$\tan A=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\frac{-\alpha}{r}-\frac{\alpha}{\beta}}{1+\frac{-\alpha^2}{\beta r}}=\frac{-\alpha(\beta+r)}{\beta r-\alpha^2}=\frac{\alpha(\beta+r)}{\alpha^2-\beta r}$$

因為 $\triangle APQ$ 為等腰 $\triangle$，設 $Q(-t,0)$ 則 $P(t,0)$

$m_{\overleftrightarrow{AQ}}=\tan A \Rightarrow \frac{\alpha}{t}=\frac{\alpha(\beta+r)}{\alpha^2-\beta r} \Rightarrow t=\frac{\alpha^2-\beta r}{\beta+r} \Rightarrow \alpha^2-\beta r=t(\beta+r)$

又 P 為 $\overline{AM}$ 中點，Q 為 $\overline{AN}$ 中點 $\Rightarrow M(2t,-\alpha)$，$N(-2t,-\alpha)$

$m_{\overleftrightarrow{BM}}=\frac{-\alpha}{2t+\beta}$，$m_{\overleftrightarrow{CN}}=\frac{\alpha}{2t+r}$

$$\tan\angle BSC=\frac{\frac{-\alpha}{2t+\beta}-\frac{\alpha}{2t+r}}{1+\frac{-\alpha}{2t+\beta}\cdot\frac{\alpha}{2t+r}}=\frac{-\alpha(4t+\beta+r)}{4t^2+2t(\beta+r)+\beta r-\alpha^2}=\frac{-\alpha(4t+\beta+r)}{4t^2+2t(\beta+r)-t(\beta+r)}$$

$$=\frac{-\alpha(4t+\beta+r)}{t(4t+\beta+r)}=\frac{-\alpha}{t}=\frac{-\alpha(\beta+r)}{\alpha^2-\beta r}=-\tan A$$

$$=\tan(180^\circ-\angle A)$$

$\Rightarrow \angle BSC+\angle A=180^\circ \Rightarrow A、B、C、S$ 四點共圓

$\Rightarrow S$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上