

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 三年良班 座號：21 號 姓名：陶佳婷

10

題號：3-4 頁碼/總頁數：

首先證明以下引理：

1. 引理：若將平面的點染成 2 種顏色（黑或白），則對任何 $a > 0$ 一定可以找到兩個距離為 a 的異色點。

證明：任取兩個異色點 A 和 B ，令 $AB = d$

(a) 如果 $d \leq 2a$ ，則分別以 A, B 為圓心，各作一個半徑為 a 的圓弧，交於一點 C ，則 C 必為 A, B 之一異色且距離為 a 。

(b) 如果 $d > 2a$ ，則以 A 為圓心，作半徑為 a 的圓弧，與 AB 交於一點 A_1 ，如果 A_1 與 A 異色，則此兩點即為所求。

若 A_1 與 A 同色，且 $AB \leq 2a$ 則依情形 (a) 處理；

若 A_1 與 A 同色，且 $AB > 2a$ ，則再以 A_1 為圓心，作半徑為 a 的圓弧，與 AB 交於一點 A_2 ，若 A_2 與 A_1 異色，則此兩點即為所求，否則再以 A_2 為圓心繼續作圓弧，如此即可在有限次步驟後復得到兩個距離為 a 的異色點。

2. 根據引理，先取兩個距離為 2 的異色點 A 和 B （設 A 為黑， B 為白）則 AB 的中點 O 非黑即白，先設其為黑色。

分別以 A, O 為圓心各作一個半徑為 1 的圓，交得兩個交點 C 和 D ，若 C 和 D 之一為黑色，則此點與 A 和 O 構成三個頂點同為黑色的正三角形；否則 $\triangle BCD$ 是三個頂點均為白色且邊長為 1 的正三角形。

若中點 O 為白色，則以 B, O 為圓心各作一個半徑為 1 的圓，

同理必可得一頂點同色的正三角形，得證。

