

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 溫 班 座號： 26 號 姓名： 蔡欣妤

題號： 3-4 頁碼/總頁數： _____ (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

在平面上，找任一由三點形成的正三角形

① 若三點同色，則即為所求

② 若三點異色

不妨假設此正三角形 $\triangle ABC$ 邊長為 $2x$ ，且 A, B 同色，與 C 異色

做 $AD \perp BC$ 交於 D

$$AD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$$

取 AC 中點 E ， $AE = EC = x$

$\therefore A, C$ 異色

$\therefore E$ 必和 A, C 其中一點同色

① 假若 E 和 C 同色

以 CE 為一邊，可得 2 個正三角形 ($\triangle CEF, \triangle CDE$)

\Rightarrow 此時， D, F 兩點任一點與 E, C 同色，則即為所求

但若 D, F 兩點皆與 E, C 異色

\Rightarrow 即 F, D 與 A 同色

設 AC, DF 交於 N

$$NF = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \sqrt{3}x$$

同理可得 $BF = \sqrt{3}x$

$\Rightarrow \triangle AFD$ 為正三角形

此時， A, F, D 三點同色，即為所求

② 假若 E 和 A 同色

由 ① 同理可推必有正三角形三點同色

故得證 \star

