

北一女中 103 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二年 貳 班 座號：21 號 姓名：陳佳寧

題號：3-3 頁碼/總頁數： (如果只有一頁，可不填)

設圓 S_1, S_2, T_1, T_2 半徑分別為 r_1, r_2, r_3, r_4
 最大的外切圓為 O ，其半徑為 R

設 T_1 切 CD 於 Q

$$\overline{PQ}^2 = (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4r_1 r_3$$

$$\text{而由 } \overline{PQ}^2 + (R - 2r_1 + r_3)^2 = (R - r_3)^2$$

$$\text{又 } r_1 + r_2 = R$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 + (R - 2r_1 + r_3)^2 = (R - r_3)^2$$

$$\Rightarrow 4r_1 r_3 + (r_2 - r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_2 - r_3)^2$$

$$\Rightarrow 4r_1 r_3 + \cancel{r_2^2} + \cancel{r_1^2} + \cancel{r_3^2} - 2r_1 r_2 - 2r_1 r_3 + 2r_2 r_3 = \cancel{r_1^2} + \cancel{r_2^2} + \cancel{r_3^2} + 2r_1 r_2 - 2r_2 r_3 - 2r_1 r_3$$

$$\Rightarrow 4r_1 r_3 + 4r_2 r_3 = 4r_1 r_2$$

$$\Rightarrow r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\text{同理可得 } r_4 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = r_3$$

故圓 T_1 與圓 T_2 的半徑相等，得證。

