


北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 三 年 良 班 座號： 21 號 姓名： 陶佳婷 

題號： 3-3 頁碼/總頁數： _____

將欲證明之式 $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$

兩邊同乘以 $(a+1)(b+1)(c+1)$

可得 $a+b+c+ab+bc+ca \geq \frac{3}{4}(a+b+c+ab+bc+ca+abc+1)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(a+b+c+ab+bc+ca) \geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow a+b+c+ab+bc+ca \geq 3$ — (*)

又因 $(a+bc)+(b+ca)+(c+ab)$

$= (a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c}) \geq 3$

$\left(\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2, \text{同理 } b+\frac{1}{b} \geq 2, c+\frac{1}{c} \geq 2 \right)$

且當 $a=b=c=1$ 時 \Leftrightarrow 等號成立

故 (*) 式成立

\therefore 所證不等式成立 #