

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 三 班 座號： 25 號 姓名： 劉育明

題號： 3-3 頁碼/總頁數： 1 (如果只有一頁，可不填)
 (請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \\ &= \frac{a(c+1) + b(a+1) + c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &= \frac{ab+ac+bc+a+b+c}{abc+1+ab+ac+bc+a+b+c} = \frac{ab+bc+ac+a+b+c}{ab+bc+ac+a+b+c+2} \end{aligned}$$

根據三變量的算幾不等式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} = 1 & \textcircled{2} \frac{ab+bc+ac}{3} &\geq \sqrt[3]{(abc)^2} = 1 \\ a+b+c &\geq 3 & ab+bc+ac &\geq 3 \end{aligned}$$

令 $ab+bc+ac+a+b+c = A \geq 6$

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} = \frac{A}{A+2} = 1 - \frac{2}{A+2}$$

$$\frac{2}{A+2} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{2}{A+2} \geq \frac{3}{4}$$

得證

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$