北一女中 105 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 溫 班　座號：5 號　姓名：李怡萱

10

題號：7-2　　頁碼／總頁數：2/6（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

1. 令 $f(x)=[x]$ 為 x 的整數部分 $\Rightarrow f(x)=[x]\le x$

2. 1至 n 中，共有 $[n]$ 個數是 1 的倍數（$\Leftrightarrow$ 有1這個因數）

   共有 $[\frac{n}{2}]$ 個數是 2 的倍數（$\Leftrightarrow$ 有2這個因數）

   共有 $[\frac{n}{3}]$ 個數是 3 的倍數（$\Leftrightarrow$ 有3這個因數）

   共有 $[\frac{n}{m}]$ 個數是 m 的倍數（$m\in\mathbb{N}$ 且 $m\le n$）（$\Leftrightarrow$ 有 m 這個因數）

若將 $S(1)$、$S(2)$……$S(n)$ 加起來時，依序把所有的1相加，把所有的2相加，……，把所有的 m 相加，……

（總和：$[n]\times 1$）（總和：$[\frac{n}{2}]\times 2$）（總合：$[\frac{n}{m}]\times m$）

則 $S(1)+S(2)+S(3)+\cdots\cdots+S(n-1)+S(n)$

$=[n]\times 1+[\frac{n}{2}]\times 2+[\frac{n}{3}]\times 3+\cdots\cdots+[\frac{n}{n-1}]\times(n-1)+[\frac{n}{n}]\times n$

又 $\because [\frac{n}{m}]\le\frac{n}{m}$，$\therefore [\frac{n}{m}]\times m\le n$

（$m\in\mathbb{N}$ 且 $m\le n$）

故 $S(1)+S(2)+S(3)+\cdots\cdots+S(n)$

$=[n]\times 1+[\frac{n}{2}]\times 2+[\frac{n}{3}]\times 3+\cdots\cdots+[\frac{n}{n-1}]\times(n-1)+[\frac{n}{n}]\times n\le\overbrace{n+n+n+\cdots\cdots+n+n}^{\text{共}n\text{項}}=n^2$

$\Rightarrow S(1)+S(2)+\cdots\cdots+S(n)\le n^2$ 得證