北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 射 班　座號：13 號　姓名：林以翎

題號：2-6　頁碼／總頁數：1/2（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

10

觀察：

$99=100-1$

$99^2=99\times(100-1)$
$=9900-99$
$=9801$

$99^3=9801\times(100-1)$
$=980100-9801$
$=970299$

$999=1000-1$

$999^2=999\times(1000-1)$
$=999000-999$
$=998001$

$999^3=998001\times(1000-1)$
$=998001000-998001$
$=997002999$

$99^{10}\doteqdot 9.043821\times10^{19}$

$999^{10}\doteqdot 9.900449\times10^{29}$

$999^{100}\doteqdot 9.047921\times10^{299}$

推測：

$99,99^2,99^3\cdots\cdots 99^{10}$ 首位數字皆為 9，$999,999^2,999^3\cdots\cdots 999^{100}$ 首位數字也皆為 9

要找 $n,n^2,n^3\cdots\cdots n^{2015}$ 首位數字皆相同者 $\Rightarrow$ 99999 可能滿足所求

$99999=10^5-1$，$99999^n=(10^5-1)^n$ 需證明 $1\le n\le 2015$ 時，首位數字皆為 9
$n\in\mathbb{N}$

證明 $(10^5-1)^n>(10^5-n)\times(10^5)^{n-1}$，$n\ge2, n\in\mathbb{N}$ ~~$n\le 1000$~~

1° 當 $n=2$ 時，$(10^5-1)^2=99999^2=9999800001>99998\times100000=9999800000$
$\Rightarrow$ ture

2° 設 $n=k$ 原式成立，$k\ge2$，即 $(10^5-1)^k>(10^5-k)\times(10^5)^{k-1}$

當 $n=k+1$ 時，

左式：$(10^5-1)^{k+1}=(10^5-1)(10^5-1)^k>(10^5-1)[(10^5-k)\times(10^5)^{k-1}]$ —①

右式：$(10^5-k-1)(10^5)^{k+1-1}=(99999-k)(10^5)^k$ —②

北一女中 104 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 射 班　座號：13 號　姓名：林以翎

題號：2-6　　頁碼／總頁數：2/2（如果只有一頁，可不填）
（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

① − ②：

$(10^5-1)[(10^5-k)\times(10^5)^{k-1}]-(99999-k)(10^5)^k$

$=99999(10^5-k)(10^5)^{k-1}-(99999-k)(10^5)^{k-1}\times 10^5$

$=\underline{99999\times10^5\times(10^5)^{k-1}}-99999\times k\times(10^5)^{k-1}-\underline{99999\times10^5\times(10^5)^{k-1}}+10^5\times k\times(10^5)^{k-1}$

$=k\times(10^5)^{k-1}$

$k\geq 2,\ k\times(10^5)^{k-1}>0$

$(10^5-1)^{k+1}>① >[10^5-(k+1)](10^5)^{(k+1)-1}$

By M.I. 原假設成立，$n\geq 2, n\in N$

可知 $(10^5)^n>(10^5-1)^n>(10^5-n)\times(10^5)^{n-1}$

$(10^5)^n>99999^n>(10^5-n)\times(10^5)^{n-1}$

$n=2,\quad 10^{10}>99999^2>99998\times10^5 \Rightarrow 99999^2$的首位數字為9

$n=2015,\ 10^{10075}>99999^{2015}>97985\times10^{10070}\Rightarrow 99999^{2015}$的首位數字為9

99999^n首位數字為何取決於(10^5-n)的首位數字

$10^5-2=99998,\ 10^5-2015=97985$

$99998\leq(10^5-n)\leq 97985,\ 2\leq n\leq 2015, n\in N$

$\Rightarrow (10^5-2).(10^5-3).(10^5-4)\cdots\cdots(10^5-2015)$首位數字皆為9

$\Rightarrow 99999.\ 99999^2.\ 99999^3\cdots\cdots 99999^{2015}$首位數字皆為9

$\Rightarrow$滿足所求

故 小綠的主張是正確的，

當 $n=99999$，$n.n^2.n^3\cdots\cdots n^{2015}$的首位數字均相同