

北一女中 103 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二年 遙班 座號：15.20 號 姓名：紀馨 陳心評

題號：4 頁碼/總頁數：4/6 (如果只有一頁，可不填)

$$\begin{cases} a = \gcd(b^2+1, c^2+1) \\ b = \gcd(c^2+1, a^2+1) \\ c = \gcd(a^2+1, b^2+1) \end{cases}$$

① 令 a 為偶數
 $\Rightarrow b^2+1, c^2+1$ 為偶數
 $\Rightarrow b, c$ 為奇數
 \therefore 二奇一偶

② 令 a 為奇數
 則 b^2+1, c^2+1
 一奇一偶 二奇
 \therefore 二奇一偶
 b, c 為偶數
 $b = \gcd(a^2+1, c^2+1)$
 偶 奇 奇
 (不合)

設 a 為偶數， b, c 為奇數。

$$b = \gcd(c^2+1, a^2+1)$$

b 為奇數， c^2+1 為偶數，知 $b \neq c^2+1$ 。

而 b 為 c^2+1 因數，因此符合 $b \leq \sqrt{c^2+1}$ 。

但只有 c^2+1 為完全平方數時等號成立，並只有 $c=0$ 時符合此條件，而 c 應為正整數，可知等號不合，推知 $b < \sqrt{c^2+1}$

同理由 $c = \gcd(a^2+1, b^2+1)$ 知 $c < \sqrt{b^2+1}$

$$\begin{aligned} b < \sqrt{c^2+1} &\Rightarrow b^2 < c^2+1 \\ c < \sqrt{b^2+1} &\Rightarrow c^2 < b^2+1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - c^2 < 1 \\ c^2 - b^2 < 1 \end{cases}$$

若 $b^2 \neq c^2$ ，則 $b^2 - c^2 > 0$ 時， $c^2 - b^2 < 0$

$b^2 - c^2 < 0$ 時， $c^2 - b^2 > 0$

但 $b^2 - c^2, c^2 - b^2$ 的正區在 $0 \sim 1$ 間，

不符合 $b, c \in \mathbb{N}$ 的性質，因此沒有一正一負的情況。

$$\text{因此 } b^2 = c^2 \Rightarrow b = c$$

代回 $b = \gcd(c^2+1, a^2+1)$ ，因 $b | b^2+1$ 且 $b | b^2$ ，

知 $b | 1$ ，則 $b = 1$ (因 $b = c, c = 1$)

而 $a = \gcd(b^2+1, b^2+1)$ 知 $a = b^2+1 = 2$ ，排列組合後 Ans. $(2, 1, 1)$
 $(1, 2, 1)$
 $(1, 1, 2)$