

北一女中 107 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 三年溫班 座號： 12 號 姓名： 張育瑾

題號： 2-3 頁碼/總頁數： 3/6 (如果一題只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 + y = z^2 & \dots \textcircled{2} \\ z^2 + z = x^2 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = -x, (x+y)(x-y) = -x$$

$\because x, y, z$ 皆非零實數， $\therefore |x| \neq |y|$ 同理可得 $|y| \neq |z|, |z| \neq |x|$

$$\text{即 } (x+y)(y+z)(z+x) \neq 0, (x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$$

由 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 可得 $x^2 + x + y^2 + y = y^2 + z^2$

$$\Rightarrow (x+y) = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x) \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ 可得 $(y+z) = (x+y)(x-y) \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{3} + \textcircled{1}$ 可得 $(z+x) = (y+z)(y-z) \dots \textcircled{6}$

$\textcircled{4} \times \textcircled{5} \times \textcircled{6}$ 得 $(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y)(y+z)(z+x)(z-x)(x-y)(y-z)$

$$\Rightarrow \because (x+y)(y+z)(z+x) \neq 0, \text{兩式同除 } (x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\text{可得 } (z-x)(x-y)(y-z) = 1 \quad \text{得證} \quad \star$$