

北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 二年溫班 座號： 12 號 姓名： 張育瑄

題號： 1-5 頁碼/總頁數： 3/3 (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$m^3 + n^3 = m^2 + 6mn + n^2, m, n \in \mathbb{N}$$

同除以 $m^2 + mn + n^2$

得 $m+n = 1 + \frac{7mn}{m^2 + mn + n^2} \Rightarrow \because m+n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{7mn}{m^2 + mn + n^2} \in \mathbb{N}$ 設 $\frac{7mn}{m^2 + mn + n^2} = k, k \in \mathbb{N}$

$$km^2 - (7+k)mn + kn^2 = 0$$

判別式 $(7+k)^2 - 4k^2 \geq 0$

$\Rightarrow k^2 - 14k + 49 \leq 0 \Rightarrow \frac{7}{3} \leq k \leq 7$ 得 $1 \leq k \leq 7, (\because k \in \mathbb{N})$

$k=1 \Rightarrow m^2 - 8mn + n^2 = 0$ (不合)

$k=2 \Rightarrow m^2 - 9mn + n^2 = 0$ (不合)

$k=3 \Rightarrow 3m^2 - 10mn + 3n^2 = 0 \Rightarrow (3m-n)(m-3n) = 0$ 且 $m+n=4$

$k=4 \Rightarrow 4m^2 - 11mn + 4n^2 = 0$ (不合) $\Rightarrow (m, n) = (1, 3)$ or $(3, 1)$

$k=5 \Rightarrow 5m^2 - 12mn + 5n^2 = 0$ (不合)

$k=6 \Rightarrow 6m^2 - 13mn + 6n^2 = 0 \Rightarrow (3m-2n)(2m-3n) = 0$ 且 $m+n=7$ (不合)

$k=7 \Rightarrow 7m^2 - 14mn + 7n^2 = 0$

$7(m-n)^2 = 0$ 且 $m+n=8$

$\Rightarrow (m, n) = (4, 4)$

Ans: $(1, 3)$ or $(3, 1)$ or $(4, 4)$