

北一女中 105 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別： 一 年 良 班 座號： 17 號 姓名： 黃品淳

題號： 4 頁碼/總頁數： _____ (如果只有一頁，可不填)

(請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。)

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$a = bq_1 + r_1 \quad a = cq_3 + r_3$$

$$b = cq_2 + r_2 \quad \text{若 } q_1 > 2r_1, q_2 > 2r_2, \text{ 欲證: } q_3 > 2r_3$$

$$\text{令 } \begin{cases} q_1 = 2r_1 + t_1 \\ q_2 = 2r_2 + t_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{由題可知 } \therefore q_1, q_2, q_3 \neq 0 \\ \therefore a \geq b \geq c \end{array}$$

($t_1, t_2 \geq 1$)

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad a &= bq_1 + r_1 \\ &= (cq_2 + r_2)q_1 + r_1 \\ &= [c(2r_2 + t_2) + r_2] (2r_1 + t_1) + r_1 \\ &= c(2r_2 + t_2)(2r_1 + t_1) + r_1 + r_2(2r_1 + t_1) \end{aligned}$$

$$2^\circ) \quad q_3 \text{ 的 min} = (2r_2 + t_2)(2r_1 + t_1)$$

$$r_3 \text{ 的 Max} = r_1 + r_2(2r_1 + t_1)$$

若 q_3 的最小值 > 2 (r_3 的最大值)

則 $q_3 > 2r_3$ 必成立

$$\begin{aligned} &(2r_2 + t_2)(2r_1 + t_1) - 2[r_1 + r_2(2r_1 + t_1)] \\ &= \cancel{4r_1r_2} + \cancel{2r_1t_1} + 2r_1t_2 + t_1t_2 - 2r_1 - \cancel{4r_1r_2} - \cancel{2r_1t_1} \\ &= t_2(2r_1 + t_1) - 2r_1 = 2r_1(t_2 - 1) + t_1t_2 \end{aligned}$$

$$\therefore t_1, t_2 \geq 1$$

$$\therefore q_3 - 2r_3 \geq 1 > 0$$

$$\therefore 2r_1(t_2 - 1) + t_1t_2 \geq t_1t_2 \geq 1$$

$$q_3 > 2r_3 \quad \text{得證}$$