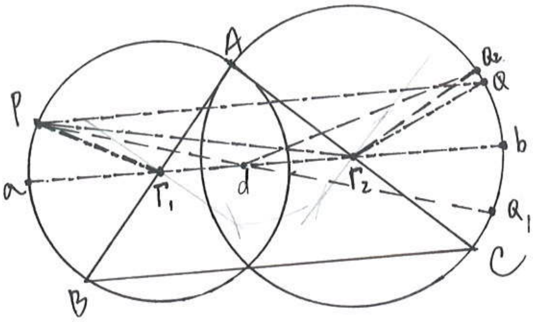
北一女中 105 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：一年溫班　座號：5號　姓名：李怡萱

10

題號：6-2　頁碼／總頁數：2/6（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）



1. $\overline{AB}$為直徑，r_1為圓心，故r_1為$\overline{AB}$中點
   同理，r_2為$\overline{AC}$中點

2. 在r_1上任取P點，在r_2上任取Q點，如圖所示，並連接$\overline{PQ}$
3. 作直線L過點r_1、r_2並分別交圓r_1、r_2於a、b兩點
   此時$\overline{Ar_1}=\overline{ar_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{Ar_2}=\overline{br_2}=\frac{1}{2}\overline{AC}$，又$\overline{Ar_1}:\overline{AB}=1:2$，故$\overline{r_1r_2}=\frac{1}{2}\overline{BC}$
   所以有$\overline{ab}=\overline{ar_1}+\overline{r_1r_2}+\overline{r_2b}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$ —— (1)

4. 連接$\overline{r_2Q}$、$\overline{Pr_2}$、$\overline{Pr_1}$（P、Q在$\overline{ab}$之同側或P、Q中有一點與a或b重合）
   根據「三角形任兩邊之和大於第三邊」，
   有$\overline{Pr_2}+\overline{r_2Q}>\overline{PQ}$，$\overline{Pr_1}+\overline{r_1r_2}>\overline{Pr_2}$
   綜合以上兩式，有$\overline{Pr_1}+\overline{r_1r_2}+\overline{r_2Q}>\overline{Pr_2}+\overline{r_2Q}>\overline{PQ}$
   又$\overline{Pr_1}=\overline{ar_1}$，$\overline{r_2Q}=\overline{r_2b}$，故$\overline{Pr_1}+\overline{r_1r_2}+\overline{r_2Q}=\overline{ar_1}+\overline{r_1r_2}+\overline{r_2b}=\overline{ab}>\overline{PQ}$ —— (2)
5. 根據(1)式，當P與a重合且Q與b重合時，有$\overline{PQ}=\overline{ab}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$ —— (3)
6. 當P、Q分別在$\overline{ab}$的異側（如圖中P與Q_1），
   連接$\overline{PQ_1}$，交$\overline{ab}$於d點，
   則可以$\overline{ab}$為對稱軸，作Q_1的對稱點Q_2（如圖，∵對稱軸上任意一點到兩對稱點等距 ∴$\overline{r_2Q_2}=\overline{r_2Q_1}$=圓$r_2$半徑，故$Q_2$必在圓$r_2$上）
   因此$\overline{PQ_1}=\overline{Pd}+\overline{dQ_1}=\overline{Pd}+\overline{dQ_2}$，
   連接$\overline{r_2Q_2}$
   根據「三角形任兩邊之和大於第三邊」，
   有$\overline{Pr_1}+\overline{r_1d}>\overline{Pd}$，$\overline{dr_2}+\overline{r_2Q_2}>\overline{dQ_2}$
   綜合以上兩式，有$\overline{Pr_1}+\overline{r_1d}+\overline{dr_2}+\overline{r_2Q_2}>\overline{Pd}+\overline{dr_2}+\overline{r_2Q_2}>\overline{Pd}+\overline{dQ_2}=\overline{Pd}+\overline{dQ_1}$
   又$\overline{Pr_1}=\overline{ar_1}$，$\overline{r_2Q_2}=\overline{r_2b}$，故$\overline{Pr_1}+\overline{r_1d}+\overline{dr_2}+\overline{r_2Q_2}=\overline{ab}>\overline{PQ_1}$ —— (4)

7. 綜合(2)、(3)、(4)式，可得$\overline{PQ}\le\overline{ab}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$，故$\overline{PQ}\le\triangle ABC$之半周長，得證