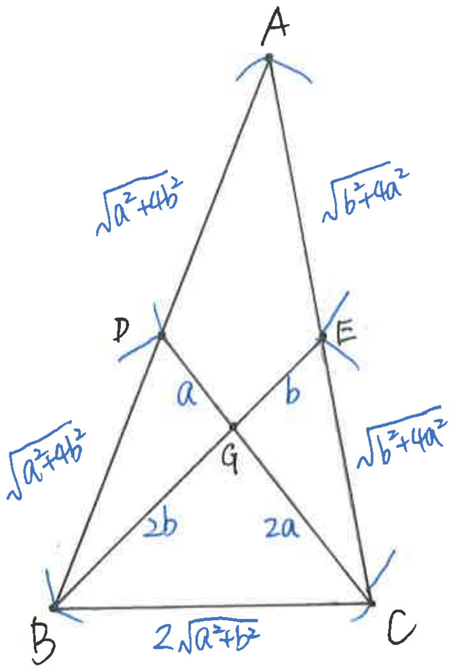
北一女中 106 學年度《數戰數決》有獎徵答活動

班別：二 年 誠 班　座號：39 號　姓名：譚書旻

題號：3-5　　頁碼／總頁數：＿＿＿＿（如果只有一頁，可不填）

（請不要將兩題的解答寫在同一張答案紙，一題的解答也不要寫在同一張答案紙的正反面。）

10



考慮：當 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 固定長度

$\angle BAC$ 愈小，$\angle BGC$ 愈小

$\overline{BC}$ 也愈小

$\Rightarrow$ 研究 $\overline{BC}$ 最長，$\angle BGC=90^\circ$ 時的結果。

If $\angle BGC=90^\circ$：

$\because$ G 為重心，$\overline{DG}:\overline{GC}=\overline{EG}:\overline{GB}=1:2$

設 $\overline{DG}=a$，$\overline{GC}=2a$，$\overline{EG}=b$，$\overline{GB}=2b$

則 $\overline{AD}=\overline{DB}=\sqrt{a^2+(2b)^2}=\sqrt{a^2+4b^2}$

$\overline{AE}=\overline{EC}=\sqrt{b^2+(2a)^2}=\sqrt{b^2+4a^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{AB}=2\overline{AD}=2\sqrt{a^2+4b^2}$，$\overline{AC}=2\overline{AE}=2\sqrt{b^2+4a^2}$

$\overline{AB}+\overline{AC}=2\sqrt{a^2+4b^2}+2\sqrt{b^2+4a^2}$，$(\overline{AB}+\overline{AC})^2=20a^2+20b^2+8\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}$

$3\overline{BC}=6\sqrt{a^2+b^2}$，$(3\overline{BC})^2=36a^2+36b^2$

$(\overline{AB}+\overline{AC})^2-(3\overline{BC})^2=20a^2+20b^2+8\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}-36a^2-36b^2$

$=8\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}-16a^2-16b^2$

$\because (a^2+4b^2)(b^2+4a^2)=4a^4+4b^4+17a^2b^2>(2a^2+2b^2)^2=4a^4+4b^4+8a^2b^2$

$\therefore 8\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}-16a^2-16b^2>8\sqrt{(2a^2+2b^2)^2}-16a^2-16b^2$

$8\sqrt{(2a^2+2b^2)^2}-16a^2-16b^2=8(2a^2+2b^2)-16a^2-16b^2=0$

$\Rightarrow 8\sqrt{(a^2+4b^2)(b^2+4a^2)}-16a^2-16b^2>0 \Rightarrow (\overline{AB}+\overline{AC})^2-(3\overline{BC})^2>0$

$\Rightarrow (\overline{AB}+\overline{AC})^2>(3\overline{BC})^2 \Rightarrow \overline{AB}+\overline{AC}>3\overline{BC}$

證畢 #